Az alábbiak a következő mű részletének (106. oldal) feldolgozását hivatottak segíteni: M. R. Sainsbury: Filozófiai logika. = A. C. Grayling (Szerk.): *Filozófiai kalauz*. Budapest, Akadémiai, 1997. 73-139.
Frissítve: 2006. 05. 23.

AZ AZONOSSÁG SZÜKSÉGSZERŰSÉGÉNEK FORMÁLIS BIZONYÍTÁSA

Kripke és mások úgy vélik, az azonosság szükségszerűsége formálisan is bizonyítható.

(1) Induljunk ki Leibniz törvényének egy megfogalmazásából!

$\forall x \forall y\{[(x=y) \,\&\, Fx] \supset Fy\}$

Alkalmazzuk erre az áthelyezési törvényt! $(p \,\&\, q) \supset r \Leftrightarrow p \supset (q \supset r)$

$\forall x \forall y\{(x=y) \supset (Fx \supset Fy)\}$

Ám Leibniz törvényét felírhatjuk más formában is:

$\forall x \forall y\{[(x=y) \,\&\, Fy] \supset Fx\}$

Erre is alkalmazhatjuk az áthelyezési törvényt:

$\forall x \forall y\{(x=y) \supset (Fy \supset Fx)\}$

Látható, hogy a levezetett tételekben a kvantorok hatókörében ugyanaz az előtag. Más szóval az $x=y$ azonosságból két „dolog is következik" (Az $x=y$ igazsága esetén két másik állításnak is igaznak kell lennie). Ezt így fejezhetjük ki:

$\forall x \forall y\{(x=y) \supset [(Fx \supset Fy) \,\&\, (Fy \supset Fx)]\}$

A kondicionális utótagja átírható bikondicionálisra. $(p \supset q) \,\&\, (q \supset p) \Leftrightarrow p \equiv q$

$$\forall x \forall y\{(x=y) \supset (Fx \equiv Fy)\}$$

Ezzel megkaptuk a jegyzet (1) formuláját. (A kondicionálist és a bikondicionálist a jegyzetben más konstans jelöli.)
F itt tetszőleges tulajdonság lehet.

(2) Azt a törvényt, hogy minden dolog azonos önmagával, így fejezhetjük ki:

$\forall x(x=x)$

Nyilvánvaló, hogy nem kontingens igazság az, hogy egy dolog azonos önmagával, hanem szükségszerű (a logika egyik alaptörvénye). A képletet ezzel az információval is kiegészíthetjük. (A szükségszerűség jele: □)

$$\forall x\, \Box(x=x)$$

(3) Tekintsük □(x=…) -t egy egyargumentumú predikátumnak, és nevezzük el *F*-nek! Ekkor:

$F(x) \Leftrightarrow \Box(x{=}(x))$

Az (**1**) levezetés eredményében helyettesítsük *F* helyére ezt a predikátumot!

$$\forall x \forall y \{(x{=}y) \supset [\Box(x{=}x) \equiv \Box(x{=}y)]\}$$

Ez a formula igaz, mert a Leibniz törvényéből és az önazonosság igaz törvényéből vezettük le helyes logikai műveletekkel. Úgy is mondhatjuk, hogy azokból mint premisszákból adódó konklúzió.

(4) Vegyük észre, hogy a bikondicionális első tagja nem más, mint az önazonosság törvénye, ami igaz!

$\forall x \forall y \{(x{=}y) \supset [\mathbf{i} \equiv \Box(x{=}y)]\}$

Ezért az egész bikondicionális a második tagra egyszerűsíthető. Az eljárás bizonyítása értéktáblázattal:

i	p	i≡p
i	i	i
i	h	h

$$\forall x \forall y \{(x{=}y) \supset \Box(x{=}y)\}$$

<u>Kiolvasás</u>: Bármely két dologra igaz, hogy ha azonosak egymással, akkor szükségszerűen azonosak. (Egy igaz azonosság szükségszerűen igaz.) QED

Ez a tétel konklúzióként adódik a (**2**)-ből és a (**3**)-ból mint premisszákból.

A jegyzet három számozott sorából és egy konklúzióból álló formális levezetése tehát tartalmaz egy kétpremisszás következtetést (2-4. sor), továbbá egy olyan behelyettesítést, ahol (3) úgy jön létre (1)-ből, hogy az általános *F* predikátumot behelyettesítjük a konkrét $\Box(x{=}\ldots)$ predikátummal. Ez az eljárás különbözik attól, amit megszoktunk, hiszen jobbára az individuumváltozókat (x, y) szoktuk behelyettesíteni, de eljárásunk mégsem önkényes, hiszen az *F* predikátumot a Leibniz törvényben éppen azért használjuk, hogy tetszőleges extenzionális predikátumot helyettesítsen.