A kötet az alábbi kiadás alapján készült
Pólos László – Ruzsa Imre: *A logika elemei.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1987

Pázmány Péter Katolikus Egyetem
Könyvtár

278947

Rev. 20

Minden jog fenntartva. Bármilyen másolás,
sokszorosítás, illetve adatfeldolgozó rendszerben való tárolás
a kiadó előzetes engedélyéhez van kötve.

© Szerzők, 2005
© Osiris Kiadó, 2005

1. ISMERKEDÉS A LOGIKA FELADATÁVAL

A „logika" szavunk a mai magyar nyelvben mindennapi kifejezésnek számít. Számos változatban használjuk. Ezek közül néhány:

„Van/nincs benne logika."

„Logikusan érvel."

„Ez a dolgok logikája."

„Logikátlan eljárás."

„Ellentmond a józan logikának"

Ezekben a megnyilvánulásokban a logika szó használatát mindenki érti; általában következetességet, a gondolkodás rendezettségét dicsérjük, vagy annak hiányát tesszük szóvá. Nyelvi megnyilvánulásainkban releváns szerepe van annak, hogy logikailag hogyan minősítjük őket.

A nyelvhasználat és a logika kapcsolatával foglalkozunk a következő szakaszban.

1.1. LOGIKA ÉS NYELVHASZNÁLAT

Nyelvet használunk. Nyelvet használunk, amikor olvasunk, amikor írunk, amikor beszélünk, és akkor is, amikor (beszédet) hallgatunk. Az emberi élet, az emberi cselekvések egyik alapvető jellegzetessége, hogy nyelvhasználat kíséri. Sem a mindennapi élet, sem a tudományos tevékenység nem képzelhető el nyelvhasználat nélkül. S minthogy a nyelvhasználat meghatározó jelentőségű ténye életünknek, eléggé természetes, hogy minősítjük is a nyelvhasználatot. Minősítésünkben sok, egymástól eltérő szempontrendszert érvényesíthetünk.

Megítélhetjük a nyelvhasználatot annak a tevékenységnek a szempontjából, amelyhez kapcsolódik, amelyet kísér vagy megelőz. Ilyenkor *eredményesnek, sikertelennek* vagy *meddőnek* mondhatjuk, vagy más, az eredményre vonatkozó jelzőt használhatunk. Máskor valamely társadalmi konvenciórendszerhez való viszony a megítélés alapja. Ebben az esetben fordulnak elő olyan minősítő jelzők, mint *udvarias, szemtelen, fölényes, lekezelő* stb. Megint máskor esztétikai szempontok képezik ítéletünk alapját.

Ezektől az egymástól nem mindig élesen elkülöníthető szempontoktól jól megkülönböztethető eset, amikor valamely nyelvi megnyilvánulást *logikai* tulajdonságai alapján minősítünk. Ilyenkor fordulnak elő olyan jelzők, mint *ellentmondásos, körben forgó, következetes* vagy egyszerűen *logikus.*

Úgy tűnhet, hogy a logikai megítélésmód – az egyéb említett megítélésmódokhoz hasonlóan – nem csupán a nyelvi megnyilvánulásokat, hanem az emberi tevékenység más formáit is minősíti. Mint láttuk, beszélünk logikus gondolkodásról, logikus cselekedetekről is, nem csak logikus beszédről vagy logikus állításokról. Azonban észrevehetünk egy fontos különbséget. Egy nyelvi megnyilvánulás mint *viselkedés, cselekvés* minősül meddőnek, udvariasnak stb. Ezzel szemben a logikai megítélésmód valódi tárgyai maguk a nyelvi kifejezések, illetve azok logikai struktúrája, az egyes állítások logikai kapcsolatai más állításokkal. A logika a köznapi szóhasználaton túl egy tudomány elnevezése is, amelynek feladata az utóbbiak feltárása, elemzése.

Ha egy cselekvéssorozatot minősítünk logikusnak, azt kb. úgy értjük, hogy tervszerűen, módszeresen halad kitűzött célja felé. Az ellentmondásosnak minősített cselekvéssorozat pedig olyan, amelyben az egyik lépés eredményét egy másik lépés megsemmisíti vagy lerontja.

A nyelv elválaszthatatlan alkatrésze a gondolkodásnak. A nyelvi forma nemcsak a közlés folyamatában, hanem az érzékszerveink révén nyert tapasztalatok és a szóbeli vagy írásbeli úton nyert információk gondolati feldolgozásában is jelen van. Ezt úgy szokás mondani, hogy a gondolkodás *hangtalan beszéd* formájában megy végbe.

Ha az emberi nem legfontosabb jellemzője az, hogy eszközhasználó társas lény, akkor a nyelvhasználat alapvető funkciója *az információ közlése, befogadása és feldolgozása,* amely a társas emberi munka (általánosabban: a társadalmi élet) összehangolásához elengedhetetlenül szükséges.

Az információközlés egységeit a logikában *állításoknak* mondjuk. Az állítás nyelvi kifejezési formája, grammatikai egysége a *kijelentő mondat.*

Az állítás fogalmához szorosan csatlakozik két további fogalom: az *igazság* és a *hamisság* fogalma. Egy állítást igaznak mondunk, ha információtartalma tökéletesen megfelel a valóságnak (a tényeknek), és hamisnak mondjuk az ellenkező esetben. Az igazságot és a hamisságot együttesen *igazságértékeknek* nevezzük.

1.2. KÖVETKEZTETÉS

Az állítások információhordozó szerepüket kétféleképpen láthatják el. Azokat az információkat, amelyek már az állítás megértésével, a felszínen adottak, *explicit* (közvetlen) információknak nevezzük. Az az állítás, hogy

(1) A jelenlegi amerikai külügyminiszter nő,

közvetlenül informál arról, hogy a jelenlegi amerikai külügyminiszter nő. Ugyanilyen világos a következő mondat információja is:

(2) Az amerikai külügyminiszternek nagy hatalma van.

De ez a két állítás együtt további információkat is tartalmaz, mint például azt, amit explicit módon a következő állítással fejezhetünk ki:

(3) Van legalább egy nő, akinek nagy hatalma van.

Azt mondjuk ilyenkor, hogy (1) és (2) (együtt) rejtetten, *implicit módon* tartalmazza azt az információt, amit explicite (3) fejez ki. A két előbbi állításból *következtethetünk* az utóbbira. A következtetéssel implicit információt teszünk explicitté. A kiinduló információkat hordozó állításokat a következtetés *premisszáinak* (előzményeinek), a napfényre hozott rejtett információt tartalmazó állítást pedig a következtetés *konklúziójának* (zárótételének) mondjuk. A rejtett információ kibontása néha, mint a fenti esetben is, igen egyszerű és magától értetődő, máskor azonban komoly gondolati erőfeszítést kíván. Ennek illusztrálására lássunk egy *Lewis Carroll*tól, az Alice-könyvek szerzőjétől származó példát.

(4) Ebben a házban nincs más állat, csak macska.
(5) Minden állat alkalmas kedvencnek, amelyik szereti a Holdat bámulni.
(6) Ha egy állatot utálok, akkor elkerülöm.
(7) Minden húsevő éjjel jár zsákmány után.
(8) Nincs olyan macska, amely nem fog egeret.
(9) Csak olyan állat vonzódik hozzám, amely e házbeli.
(10) A kenguruk nem alkalmasak kedvencnek.
(11) Csak húsevő állatok fognak egeret.
(12) Utálom azokat az állatokat, amelyek nem vonzódnak hozzám.
(13) Azok az állatok, amelyek éjjel járnak zsákmány után, szeretik a Holdat bámulni.

Ezekben az állításokban implicite benne van az az információ, amit explicite a következő állítás fejez ki:

(14) Mindig elkerülöm a kengurukat.

Ez a példa azonban kissé zavarba ejtő. Az előző példában magától értetődőnek éreztük, hogy az első két állításból, a *premisszákból,* következik a harmadik állítás, a *konklúzió.* Az utóbbi példa esetén korántsem evidens, hogy a tíz premisszából folyik a konklúzió. Ennek kimutatása komoly gondolati munkát igényel.

A logika alapvető feladata a helyes következtetés fogalmának szabatos meghatározása, törvényeinek feltárása.

A következtetés helyességét illetően megfogalmazhatunk egy elengedhetetlen feltételt: Egy következtetés csak akkor lehet helyes, ha a premisszák igazsága *szükségszerűen* maga után vonja a konklúzió igazságát, azaz ha *lehetetlen* olyan szituáció, amelyben a premisszák mind igazak, a konklúzió viszont hamis. De ez a követelmény még homályos, a benne szereplő 'szükségszerű', illetve 'lehetetlen' kifejezés többértelműsége folytán. Helyesnek minősítsük-e a következtetést abban az esetben, amikor a *természet törvényei* alapján folyik a premisszákból a konklúzió? Igenlő válasz esetén a természettörvények feltárása is a logika feladata lenne. Elfogadjuk-e helyesnek azt a következtetést, amelyben a szavak *jelentése* zárja ki azt az esetet, hogy a premisszák igazak, a konklúzió pedig hamis legyen? Ha igen, akkor a szavak jelentésének tanulmányozása is a logika feladata lenne. Ha a logika határait nem óhajtjuk annyira kitágítani, hogy a természet és a nyelv kutatása is feladata legyen, akkor az iménti kérdésekre elutasító választ kell adnunk.

1.3. A KÖVETKEZTETÉS HELYESSÉGE

Illusztráljuk az iménti problémákat példákkal.

Premissza: Péter megkapta a malériát.

Konklúzió: Péternek kininre van szüksége.

Világos, hogy a következtetés helyességét csak az orvostudomány és nem a logika igazolhatja. Ha azonban a premisszát kiegészítjük az orvostudományból kapott ismerettel, a következtetés helyessége már tisztán logikailag bizonyítható. A kiegészítő premissza:

Ha valaki maláriás, kininre van szüksége.

A példázott következtetést *hiányos* (entimematikus) következtetésnek minősítjük, amelyből logikailag szabatos következtetést alkothatunk, ha felsoroljuk *elhallgatott premisszáit is* (azokat a tudományos ismereteket, törvényeket, amelyek a konklúzió levonásához szükségesek).

Akár gondolatban következtetünk (információk gondolati feldolgozása során), akár élőszóval (érvelésben; vitában) vagy írásban, gyakran használunk ilyen hiányos következtetéseket. Ezt nem minősíthetjük gondolkodási hibának, föltéve hogy az elhallgatott premisszákról számot tudunk adni.

A logika hiányos következtetésnek minősíti a következő példát is:

Premissza: Zakariás agglegény.
Konklúzió: Zakariásnak nincs felesége.

Miért lenne ez hiányos? – kérdezhetjük. Hiszen helyességének igazolásához nem kell idéznünk egyetlen tudomány egyetlen törvényét sem (nem úgy, mint az előző példában). *Ha Zakariásnak lenne felesége, nem mondhatnánk őt agglegénynek.* Aki érti a példában szereplő szavakat, nem vonhatja kétségbe e következtetés helyességét. Ez igaz, de a szavak jelentésének általános tanulmányozása nem a logika (hanem a nyelvtudomány) feladata. A logika szerint e következtetés elhallgatott premisszája a következő:

Egyetlen agglegénynek sincs felesége.

Ez az állítás, ha nem is fejti ki teljesen az 'agglegény' szó jelentését, annyit elárul róla, amennyi a következtetés tisztán logikai igazolásához szükséges.

Hasonló okokból hiányos az alábbi következtetés is:
Premisszák: Amália anyja Bellának. Bella anyja Csillának.
Konklúzió: Amália anyai nagyanyja Csillának.
Az elhallgatott premissza:
Bármi legyen is x, y és z, ha x anyja y-nak, y pedig z-nek, akkor x anyai nagyanyja z-nek.

Persze, ezt is tudja mindenki, aki az 'anyja', 'nagyanyja' szavak jelentését ismeri, és ezért nem érezzük az elhallgatott premissza hiányát.

Végül lássunk példát olyan következtetésre is, amelyet (remélhetően) helyesnek érzünk, és ugyanakkor a logika tudománya szerint is helyesnek számít (nem szorul semmiféle kiegészítő premisszára). Három példát mutatunk, amelyek hasonlósága bizonyára feltűnik az olvasónak is. Az utolsó példában néhány szó jelentése ismeretlen, a következtetés helyessége mégsem kétséges.

Premisszák: Esik az eső.
Ha esik az eső, sáros az út.
Konklúzió: Sáros az út.
Premisszák: Ha dolgozom, elfáradok. Dolgozom.
Konklúzió: Elfáradok.
Premisszák: Ha három lábon gyábokorsz, a Kálán Púgra nem tudsz menni.
Három lábon gyábokorsz.
Konklúzió: A Kálán Púgra nem tudsz menni.

(Az utolsó példa halandzsaszavai Lázár Ervin *A hétfejű tündér* c. könyvében szerepelnek.)

E következtetések közös sémája:

(15) *Premisszák:* Ha A, akkor B.
A.
Konklúzió: B.

A példák alapján a következő előzetes meghatározást adhatjuk:

Egy következtetés logikai helyessége független a benne szereplő állítások tar-

talmától, a szavak többségének jelentésétől, és csupán az előforduló logikai szavak jelentésétől, valamint a logikai szavak meghatározta szerkezettől – az ún. logikai szerkezettől – függ.

A helyes következtetés szabatos meghatározásának elengedhetetlen föltétele a 'logikai szerkezet' és a 'logikai szó' fogalmának tisztázása. Éppen ez a feladata a *logikai grammatikán*ak, amelynek tanulmányozásához a 2. fejezetben fogunk nekivágni.

1.4. HOL VAN SZÜKSÉG A LOGIKÁRA?

Az eddigiek alapján már felvázolható egy madártávlati kép a logika lehetséges alkalmazásairól is. Logikára van szükség mindenütt, ahol következtetéseket végzünk. Következtetésekre pedig szükség van a tudományban, az oktatásban és a mindennapi életben.

Egy tudomány által létrehozott információmennyiségnek csupán kis töredéke explicit információ. Az információk többségét ezekből gondolati munkával nyerhetjük. Még a grammatikai szabályok alkalmazása is következtetést, bár rendkívül egyszerű következtetést igényel!

Premisszák: A magánhangzóra végződő igék múlt idejének jele két 't'.
A 'lő' ige magánhangzóra végződik.

Konklúzió: A 'lő' ige múlt ideje 'lőtt'.

A gazdaságos információközléshez nélkülözhetetlen, hogy az információk többsége rejtett, implicit információ legyen. A középkori arab iskolákban az oktatás általánosan használt módszere volt bizonyos jól kiválasztott szövegek betű szerinti bemagoltatása. Mindez kiválóan szolgálta azt a célt, hogy egyes nagy tekintélyű szerzők véleménye bármikor gyorsan és pontosan előhívható legyen. Ezek a vélemények azonban ott sem adtak választ minden kérdésre. Az aktuális kérdésekre adandó választ ezekből ki kellett következtetni. Ennek a helyzetnek jól megfelelt, hogy a logika, amely a következtetésekkel foglalkozik, igen előkelő helyet foglalt el a stúdiumok között. A 20. században következtetéseink premisszáit talán kevésbé tekintélyelvűen alapozzuk meg, de az információközlésben a gazdaságosság szempontja még inkább előtérbe került, egyre több a kikövetkeztetendő információ, s ez természetesen vezet a logika szerepének növekedéséhez. (A számítástechnika elterjedése e növekedés másik, igencsak bőven buzgó forrása.)

A logika beható ismerete nélkülözhetetlen a kommunikálandó információ célszerű elrendezéséhez. Az oktatás – s ebben nincs változás a középkor arab iskoláihoz képest – részben közvetlen információkat ad át, részben az ezekből való következtetés készségének kialakítására törekszik. Két szempont is indokolja tehát, hogy a pedagógusok behatóan ismerjék a logikát. A közvetlen információk kiválasztásában, megszervezésében érvényesíteniök kell azt a szempontot,

hogy a logikai kapcsolatok világosak legyenek, hogy ezáltal megkönnyítsék a belőlük való következtetést. De nekik kell kialakítaniok a tanulókban azokat a logikai képességeket is, amelyek az önálló következtetések helyességét biztosítják. A logikai képességek kialakításában a pedagógusok példája szolgáltatja (vagy kellene, hogy szolgáltassa) a pozitív mércét. Ha a pedagógus körben forgó okoskodásokat, hibás következtetéseket alkalmaz, aligha várható, hogy tanítványainak megnyilvánulásai mentesek legyenek ezektől a hibáktól. Ezzel szemben, ha a pedagógus maga helyesen és tudatosan használja a logikát, rendszeresen javítja tanítványai hibáit, akkor remélhető, hogy a szabatos kifejezésmód gyakoribb jelenség lesz, mint manapság.

Ugyanilyen fontos a szabatos meghatározások és a világos, egyértelmű osztályozások használata is. Ezekben és általában a tanulóknak átadandó tudásanyag megszervezésében a logika nyújtja a szabatosság azon ismérveit, amelyek a téma sajátos természetétől függetlenül, minden tárgyi területen érvényesek.

A logika segítségével ellenőrizhetjük magunk és mások *érvelésének* helyességét. A logikai eszközök ismerete nélkülözhetetlen az érvelési hibák feltárásában. Ez pedig például a politikai gyakorlat számára sem lehet közömbös.

Van azonban valami, amit a következtetésekkel kapcsolatosan nem várhatunk el a logikától. A logika nem tudja megmondani, hogy adott premisszákból mire kell következtetni. Csupán azt képes körülhatárolni, hogy mire *lehet;* alternatívákat vázol föl, de univerzális módszert nem tud adni. Csak arra tud válaszolni, hogy adott állításoknak logikai következménye-e egy további állítás, és mi az, ami nem következik. Továbbá a logika megadja a helyes következtetés feltételeit, de más – és gyakran nem is könnyű – kérdés az, hogy egy adott következtetés megfelel-e ezeknek a feltételeknek. A logika képes arra, hogy elősegítse a gondolatok szabatos kifejezését, s ezen keresztül a szabatos gondolkodást, de nem helyettesítheti azt.

Ellenőrző kérdések

Minden fejezet végén ellenőrző kérdések és gyakorló feladatok találhatók. A kérdések megválaszolásával és a feladatok megoldásával ellenőrizheti az olvasó, hogy megértette-e a fejezet tartalmát. Ha egy feladat végén szögletes zárójelek között számok szerepelnek, ezek azoknak a kérdéseknek a sorszámai, amelyek megválaszolása a feladat sikeres megoldásához szükséges.

1.1. Mi a logika alapvető feladata?
1.2. Hogyan nevezzük a következtetésben előforduló állításokat?
1.3. Mitől függ a következtetés helyessége?

Gyakorló feladat

1.1. Az alábbi következtetéseket a logika hiányosaknak minősíti. Kíséreljük meg kiegészíteni őket az elhallgatott premisszákkal!

a) Premisszák: András és Bálint édestestvérek.
Bálint anyja tanítónő.
Konklúzió: András anyja pedagógus.
b) Premisszák: Csaba éveinek száma páros és osztható 3-mal.
Csaba elmúlt 10 éves, de még nincs 15 éves.
Konklúzió: Csaba 12 éves.
c) Premisszák: Egyetlen trák harcos sem gyáva.
Nincs olyan trák harcos, aki nem szakállas.
Konklúzió: Van olyan szakállas, aki nem gyáva.

Ha nem sikerül megoldania e feladatokat, ne keseredjen el, hiszen még csak most kezd ismerkedni a logikával. A válaszokat megtalálja a könyv végén a *Feladatmegoldások* rovatban. (Más megoldás is lehetséges, mint amit ott talál.)

2. A LOGIKA NYELVTANA

Az 1.3. szakasz végén megállapítottuk, hogy egy következtetés helyessége csak a benne szereplő állítások logikai szerkezetén és az előforduló logikai szavak jelentésén múlhat. A logikai grammatika feladata a 'logikai szerkezet' és a 'logikai szó' fogalmának kifejtése. (Így végső célja: előkészíteni a helyes következtetés ismérveinek szabatos meghatározását.) E fejezetben a logika nyelvtanának kategóriáival ismerkedünk meg. Ezeket az ismereteket a későbbi fejezetekben részletezzük és bővítjük.

2.1. KIJELENTŐ MONDAT ÉS ÁLLÍTÁS

A nyelvi információközlés leggyakrabban használt eszköze a kijelentő mondat. A kijelentő mondat információtartalmát *állítás*nak neveztük. Hiba lenne a két fogalmat megkülönböztetés nélkül használni. Grammatikailag kijelentő mondatnak minősülnek olyan kifejezések is, amelyek hiányosságuk miatt vagy más okból kifolyólag nem alkalmasak arra, hogy egyértelmű információt hordozzanak.

(1) Holnap megbukik a legokosabb diák.

(2) Nem ő ment el.

Mindkét mondat joggal tekinthető kijelentő mondatnak, de egyik sem tartalmaz egyértelmű információt. Az (1) mondat például akkor válna egyértelművé, ha tudnánk, hogy melyik napon, hol hangzott el, és kire utal a „legokosabb diák" kifejezés. Ezeknek a hiányzó adatoknak a rögzítése többféleképpen történhet. Az egyik lehetőség az adatok explicit belefogalmazása a mondatba:

Holnap, 1999. június 10-én megbukik az ELTE Bölcsészettudományi Karának legokosabb diákja, Kovács István.

Egy másik, feltehetően gyakrabban előforduló megoldás a hiányzó adatok szövegkörnyezet segítségével történő rögzítése. Ha például egy irodalmi műben

mány Péter Katolikus Egyetem Bölcsészettudományi Kar

szerepel (1), akkor ezt általában úgy értjük, hogy a pillanatnyi cselekményt követő napon, a diákok közül az, akire a műben a „legokosabb" jelző illik, meg fog bukni.

Pótolhatja a hiányzó adatokat az a nyelven kívüli helyzet is, amelyben a mondat elhangzik. Képzeljük el a következő helyzetet: Az egyetemen, konzultáció után, az egyik tanársegéd valamelyik hallgató felkészületlenségének hatására mondja ki (1)-et. Ilyenkor az adott mondat a jelenlevők számára egyértelmű információt hordoz, annak ellenére, hogy sem maga a mondat, sem annak szövegkörnyezete nem elégséges az egyértelműsítésre.

Ha az információ egyértelműsítéséhez szükséges adatokat a mondat maga nem tartalmazza, akkor a hiányzó adatokat valahogyan rögzítettnek tekintjük, és ragaszkodunk ahhoz, hogy az adatok egy elemzésen belül csak egyféleképpen lehetnek rögzítve. Nem szabad megengedni, hogy azokat hol így, hol úgy rögzítetteknek gondoljuk.

Látjuk tehát, hogy ugyanaz a kijelentő mondat különböző állításoknak felelhet meg, attól függően, hogy a hiányzó adatokat hogyan rögzítjük. Van azonban az állítások és a kijelentő mondatok különbségének egy másik oldala is. Előfordul, hogy ugyanazt az állítást, ugyanazt az információt különböző kijelentő mondatokkal is ki tudjuk fejezni.

(3) Alea iacta est.

(4) The die is cast.

(5) A kocka el van vetve.

A legenda úgy szól, hogy Julius Caesar mondta (5)-öt, mikor átlépte a Rubicont. Meglehetősen nyilvánvaló azonban, hogy ha igaz is, hogy Caesar mondott valami ilyesmit, az inkább lehetett (3), mint (4) vagy (5), lévén, hogy Caesar nem tudott magyarul, sőt feltehetően angolul sem. Az, hogy ennek ellenére igaznak lehet tartani a legendát, arra enged következtetni, hogy az adott esetben nem a mondat, hanem az állítás, a mondat információtartalma az, ami számunkra lényeges. Továbbá nemcsak különböző nyelveken lehet ugyanazt az állítást másmás mondattal kifejezni, hanem egy nyelven belül is lehetőség van erre:

Péter felesége Juli.
Juli férje Péter.

Minden ember halandó.
Az emberi élet véges.

Már említettük, hogy az állítások *igazságértékkel* bírnak: igazak vagy hamisak lehetnek. Az állítást kifejező kijelentő mondatot is mondhatjuk igaznak, illetve hamisnak, bár e jelzőket *elsődlegesen* állításokra alkalmazzuk.

Egy állításnak azonban feltétlenül igaznak vagy hamisnak kell lennie. Harmadik eset nincsen. Ezt rögzíti az a logikai elv, amit a KIZÁRT HARMADIK elvének nevezünk. Az elv maga ARISZTOTELÉSZ-től, a logika ókori görög megalapozójától (i. e. 384–322) származik, s bár nála még hiányzik az állítás és kijelentő mondat megkülönböztetése, az elvet ő is olyan kifejezésekre alkalmazza, amelyektől az egyértelmű információtartalom magától értetődő elvárás.

Szintén az egyértelmű információtartalommal függ össze az állítások igazságértékére vonatkozó másik arisztotelészi logikai elv, az ELLENTMONDÁS elve. E szerint minden állítás csak egy igazságértékkel rendelkezhet, nem lehet egy állítás egyszerre igaz is és hamis is. E két logikai elvet a következő mondatban foglalhatjuk össze:

Minden állítás vagy igaz, vagy hamis,
de nem lehet egyszerre mind a kettő.

Az állítások igazságértékét objektíve adottnak, tudatunktól és tudásunktól függetlennek tekintjük. Valamely állítás igaz vagy hamis volta az állításnak a valósághoz való objektív viszonyát fejezi ki, függetlenül attól, hogy az állítás igazságértékét ismerjük-e, vagy sem. A következő állítás igazságértékét jelenleg senki sem ismeri:

A Tejútrendszerben a Földön kívül is van élet.

De ez mit sem változtat azon, hogy ez az állítás vagy igaz, vagy hamis. A múltra és a jövőre vonatkozó állítások túlnyomó részének nem ismerjük az igazságértékét, de ez sem kényszerít a kizárt harmadik elvének feladására. Az is előfordul, hogy valamely hamis állítást hosszú időn keresztül szinte mindenki igaznak tart (és persze az is, hogy az igazat hamisnak tartják). Az állítás igazságértékét meg kell különböztetnünk mind az igazságérték *ismeretétől,* mind a rá vonatkozó *hittől, vélekedéstől.*

A logika abban általában nem tud állást foglalni, hogy egy konkrét állítás igaz-e, vagy hamis (kivételt csupán a logikailag igaz, illetve a logikailag hamis állítások képeznek, de ezekről majd később), csupán azt állítja, hogy egy állítás más, mint igaz vagy hamis nem lehet. És válaszolni tud olyan kérdésekre, hogy *ha* igaz ez meg ez, *akkor* igaz-e még emez is, vagy ez ki van zárva, hamisnak kell lennie.

2.2. INDIVIDUUMNEVEK

Azokat a nyelvi kifejezéseket, amelyek segítségével individuális objektumokat (személyeket, tárgyakat) tudunk megnevezni, *individuumneveknek* mondjuk. Közéjük tartoznak a tulajdonnevek, de – mint az alábbi példák mutatják – másfajta individuumnevek is léteznek. (Az individuumneveket aláhúzással emeltük ki.)

(6) **II. Erzsébet** nem más, mint **a jelenlegi angol uralkodó.**
Thomas Mann írta a ***Varázshegy*** **c. regényt.**
A Magyar Köztársaság elnöke fogadta **Ausztria új nagykövetét.**

E példákban 'II. Erzsébet', 'Thomas Mann' és 'Ausztria' *tulajdonnevek:* hogy mit neveznek meg, azt névhasználati megállapodás rögzíti.

Ettől eltérően, 'a jelenlegi angol uralkodó', a '*Varázshegy* c. regény', 'a Magyar Köztársaság elnöke' és 'Ausztria új nagykövete' úgy nevez meg egy-egy individuumot, hogy ehhez egy tulajdonságát vagy tulajdonságainak egy együttesét használja föl. Az ilyen kifejezéseket *leírások*nak fogjuk mondani.

A tulajdonnevek. Tulajdonnevük van a személyeknek, egyes háziállatoknak, a földrajzi objektumoknak, az ismert égitesteknek, az irodalmi művek fiktív (elképzelt) szereplőinek, és még olyan elvont objektumoknak is, mint a természetes számok, az év hónapjai, a hét napjai stb. Azt, hogy egy tulajdonnév kit-mit nevez meg – másképp: kit-mit *jelöl* –, közölhetjük „bemutatás" révén (például „Ez a folyó itt a Duna"), vagy egy leírás segítségével (mint (6)-ban, ahol II. Erzsébetet azzal a személlyel azonosítottuk, akit 'a jelenlegi angol uralkodó' leírás jelöl.)

Közismert tény, hogy különböző individuumoknak lehet azonos tulajdonnevük. Például egy történelemtanár noteszében előfordulhat a következő feljegyzés:

(7) Nagy Sándor nem készült Nagy Sándor hadjárataiból.

Nyilvánvaló, hogy az állítás félreértése volna, ha úgy értelmeznénk, hogy

(7′) Nagy Sándor tanuló nem készült saját hadjárataiból.

De félreértés lenne az is, ha az állítást úgy értelmeznénk, hogy

Nagy Sándor hadvezér nem készült saját hadjárataiból.

(7)-ben a 'Nagy Sándor' tulajdonnév két előfordulása más-más individuumot nevez meg; az első az adott tanár egy tanítványát, a második pedig Arisztotelész egy tanítványát.

Ha egy logikai elemzésben valamely tulajdonnév többször is előfordul (akár egy mondaton belül, akár különböző mondatokban), akkor megkívánjuk, hogy

minden előfordulása egyazon individuumot jelölje. (Ha e követelmény nem teljesül, akkor logikai hiba léphet föl, például (7)-ből következne (7′).) Másképp: *különböző individuumokat csakis különböző nevekkel jelölhetünk.* Névazonosság esetén pl. indexeket használhatunk a megkülönböztetésre; így (7) helyett ezt írhatjuk:

(Nagy Sándor)$_1$ nem készült (Nagy Sándor)$_2$ hadjárataiból.

A leírások (deskripciók). Lényegesen eltér a tulajdonnevektől a *leírások* (idegen szóval *deskripciók*) használata. Itt nem köthetjük ki, hogy egy adott leírás mindig ugyanazt az individuumot nevezze meg. Az „a jelenlegi magyar király" leírás mást nevezett meg 1001-ben, mint 1222-ben. Ma pedig nem nevezi meg egyiket sem a kettő közül, sőt az is nyilvánvaló, hogy nincs olyan individuum, amelyet ma megnevezne.

Ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy egy leírás általában milyen feltételek mellett nevez meg valamit, és ha megnevez valamit, úgy mit nevez meg, akkor – durván – a következő mondható:

(a) Ha a leírásban szereplő tulajdonság (együttes) csupán egyetlen individuumra igaz, akkor a leírás ezt az individuumot nevezi meg.

(b) Ha a leírásban szereplő tulajdonság (együttes) egyetlen individuumra sem igaz, vagy több mint egy individuumra igaz, akkor az adott leírás nem nevez meg semmit.

Így például, ha a 'Szókratész' tulajdonnév egy rögzített személyre utal, akkor a 'Szókratész anyja' leírás egyértelműen jelöli e személy anyját (hiszen minden embernek egy, de csak egy anyja van). Viszont a 'Szókratész bátyja' leírás semmit sem jelöl, ha Szókratésznak több mint egy, nála idősebb fivére van, vagy egy sincs; míg ha éppen egy ilyen fivére van, akkor azt jelöli.

Ha egy kijelentő mondatban olyan leírás szerepel, amely semmit sem jelöl, e tény megfoszthatja a mondatot információhordozó funkciójától. Erre példa a következő mondat:

(8) 1984. július 15-én az akkori brit miniszterelnök felesége Párizsban tartózkodott.

Ebben a következő leírás szerepel:

(9) az akkori (1984. július 15-i) brit miniszterelnök felesége.

Azonban a jelzett időben Nagy-Britannia miniszterelnöke nő volt, s így aligha beszélhetünk a feleségéről. Következésképp a (9) leírás semmit sem jelöl. Nem lévén jelölete, sem azt nem állíthatjuk „róla", hogy a jelzett időben Párizsban tartózkodott sem azt, hogy nem tartózkodott ott. Ha valaki (8) igazságértéke iránt

tudakozódik, félrevezető lenne azt mondani, hogy ez a mondat hamis, azaz a szóban forgó személy a jelzett időben nem volt Párizsban. A becsületes válasz nyilván az, hogy az akkori brit miniszterelnöknek nem volt – nem lehetett – felesége (hiszen nő volt), és így „a feleségére" vonatkozó minden kérdés tárgytalan. Ezek alapján az a döntés tűnik értelmesnek, hogy (8)-at nem hamis állításnak minősítjük, hanem információtartalom nélküli mondatnak, azaz olyan mondatnak, amely *nem fejez ki állítást.*

Tekintettel a most tapasztalt jelenségre, az esetleges logikai zavarok elkerülése érdekében bevezetünk egy (ideiglenes) kikötést:

Egy kijelentő mondatot csak akkor fogadunk el állítás kifejezőjének, ha a benne szereplő tulajdonnevek és leírások mindegyike egy-egy individuumot jelöl. Másképp: ha egy kijelentő mondatról föltesszük, hogy (igaz vagy hamis) állítást fejez ki, akkor egyben azt is föltesszük, hogy a benne esetleg szereplő individuumnevek egyértelműen jelölnek egy-egy individuumot.

Névmások. Egyes kijelentő mondatokban *névmások is* szerepelnek. Ezek közül az egyes számú személyes névmások és a mutató névmások, mint

(10) én, te, ő, ez, az, emez, amaz,

individuális objektumokra utalnak. Hogy kit-mit jelölnek, az használatuk körülményeitől függ. (Az 'én' például mindig a beszélőt, a megnyilatkozót jelöli.) Vegyük még figyelembe, hogy a magyar mondatokban a személyes névmás gyakran elmarad, mert az ige személyragjában vagy a birtokos személyragban rejtőzik, például:

(Én) átnézem a(z ő) dolgozatát, amíg (te) megebédelsz.

Nyilvánvaló, hogy a logikai elemzés szempontjából a személyragokban rejtett névmásokat is figyelembe kell vennünk.

A névmást tartalmazó mondatoknak (önmagukban) nincs egyértelmű információtartalmuk; ám használati körülményeik rögzíthetik, hogy a névmások kiket-miket jelölnek, s ennek figyelembevételével már információhordozók lehetnek.

Az elmondottak folytán a logikai elemzésben *az individuumokra utaló névmásokat* (a (10) alattiakat) úgy *kezelhetjük, mintha tulajdonnevek lennének.* Ha egy névmás (például 'ez') többször is előfordul, de különböző előfordulásai különböző individuumokra utalnak, az ilyen előfordulásokat indexezéssel különböztetjük meg ('ez_1', 'ez_2' stb.). *Ha egy kijelentő mondatról föltesszük, hogy állítást fejez ki, akkor azt is föl kell tennünk, hogy az esetleg benne szereplő (individuumokra utaló) névmások egyértelműen jelölnek egy-egy individuumot.*

2.3. A LOGIKAI GRAMMATIKA ALAPKATEGÓRIÁI

A természetes nyelvek nyelvtanában az értelmes kifejezéseket osztályokba sorolják, ezeket az osztályokat *grammatikai kategóriáknak* szokás nevezni. Ilyen grammatikai kategóriák például: ige, főnév, melléknév stb. A logika grammatikája szintén kategóriákat használ, és két *alapkategóriát* különböztetünk meg: a *kijelentő mondat* és az *individuumnév* kategóriáját. Ezek közül az elsőt lényegében ugyanazon értelemben használja, mint bármely természetes nyelv nyelvtana. Viszont az individuumnév kategóriája – ahogyan az előzőekben körvonalaztuk – nem szerepel a hagyományos nyelvtanban.

A 'kifejezés' szót a megszokott értelmében használjuk: nyelvi jelet, illetve jelsorozatot értünk rajta, amely kimondott vagy leírt alakban érzékelhető módon megnyilvánulhat.

Az, hogy a logikai grammatika nem lehet azonos például a magyar nyelv grammatikájával, két okkal magyarázható. (1) A logika nem tapadhat *egyetlen* nyelvhez, hiszen nem nemzeti jellegű, hanem internacionális. A nemzeti nyelvtanokból tehát legföljebb azt kölcsönözheti, ami minden – vagy legalábbis elég sok – nyelvben közös. (2) A logikai grammatika a *helyes következtetés* fogalmának meghatározásában tölt be fontos szerepet, tehát ehhez kell alkalmazkodnia. Ezért összevonhat olyan természetes nyelvi kategóriákat, amelyek a következtetés szempontjából azonos funkciót töltenek be, és széttagolhat valamely természetes nyelvi kategóriát, ha annak alosztályai különböző módon viselkednek a következtetés tekintetében.

A továbbiakban 'kijelentő mondat' helyett, a rövidség kedvéért, gyakran a 'mondat' kifejezést fogjuk használni. (Kérdő, felszólító és óhajtó mondatokkal amúgy sem foglalkozunk.) Hasonlóan, 'individuumnév' helyett többnyire a 'név' kifejezést használjuk.

Ezek szerint a logikai grammatika alapkategóriái: *a mondat és a név.* Minden más *értelmes* kifejezést, amely egy mondatban vagy névben alkatrészként előfordulhat, *funktor*nak nevezünk. (Az 'értelmes' jelző azért szerepel itt, mert nem tekintjük funktoroknak a tagolójeleket: szóköz, vessző, pont stb.).

2.4. FUNKTOROK

Tudjuk, hogy az állítások nyelvi kifejezési formái a (kijelentő) mondatok. Az állítások gyakran bizonyos fogalmak közötti kapcsolatokra vonatkozó információkat tartalmaznak. A funktorokat, első közelítésben, úgy foghatjuk föl, mint *a fogalmak nyelvi kifejezési formáit.* Ezt a megállapítást később részletezzük és pontosítjuk. Előbb azonban a funktorokkal mint grammatikai képződményekkel foglalkozunk.

A következő mondatokban és összetett nevekben vastag betűkkel emelünk ki egy-egy funktort.

(11) Mikkamakka **kószál.**
(12) Mikkamakka **megfontoltabb, mint** Vacskamati.
(13) **Szerencsére,** Mária már meggyógyult.
(14) Péter nyugtalan volt, **mert** Mária késett.
(15) Péter **anyja.**
(16) Öt **meg** három. (5+3)

A (11), (12) mondatokban szereplő funktorok feladata, funkciója átlátszó: segítségükkel *nevekből mondatokat* képezhetünk. Az ilyen funktorokat *predikátumoknak* nevezzük. A 'kószál' funktorhoz egy, a 'megfontoltabb, mint' funktorhoz két nevet kell kapcsolni, hogy mondatot kapjunk. Ezért az elsőt *egyargumentumú,* a másodikat *kétargumentumú* predikátumnak mondjuk.

A 'predikátum' szó a latin *praedicatum*ból ered, melynek egyik jelentése: állítmány. Pontosabb lenne a *praedicator* (állító) használata, de ennek magyaros 'prédikátor' kiejtése zavaró és félrevezető lenne. Egy predikátum némely mondatban betöltheti az állítmány szerepét – mint (11)-ben –, de többnyire nem ez a helyzet.

A (13), (14) mondatok aláhúzott funktorai egyszerűbb mondatokból képeznek összetettebb, bonyolultabb mondatokat; ezeket *mondatfunktoroknak* nevezzük. A 'szerencsére' szó a magyar nyelvtan szerint mondatmódosító, a logikai grammatika szerint *egyargumentumú* mondatfunktor, hiszen *egy* mondatot kell hozzáfűzni, hogy a módosított mondatot megkapjuk. A 'mert' kötőszó viszont *kétargumentumú* mondatfunktor, hiszen *két* mondatból képez összetett mondatot.

A (15) alatti 'Péter anyja' kifejezés összetett név, melynek alkatrészei a 'Péter' tulajdonnév és az 'anyja' funktor. Utóbbinak itt az a funkciója, hogy egy névből másik nevet – éspedig az első névvel jelölt személy anyjának a megnevezését képezze. (Természetesen 'Péter anyja' nem tulajdonnév, hanem leírás.) Ezért az 'anyja' szót, itteni szerepében, *egyargumentumú névfunktor*nak mondjuk.

A (16) alatti kifejezés – ha benne a 'meg' szót az összeadás jelének tekintjük – ugyancsak név, éspedig összetett számnév, melynek alkatrészei az 'öt' és a 'három' egyszerű számnevek, továbbá a 'meg' funktor. Az 'öt meg három' összetett számnév ugyanazt a számot nevezi meg, mint az egyszerű 'nyolc' számnév. Ugyanez áll a zárójeles változatra, az '5+3' aritmetikai kifejezésre is. Ezek szerint az összeadás '+' jele – és a vele egyező értelemben használt 'meg' szócska is – *kétargumentumú névfunktor,* hiszen két számnévből képez összetett számnevet. (Persze, a 'meg' nem mindig az összeadás jele, néha az 'és' kötőszó szinonimájaként szerepel.)

A bemutatott példák alapján a funktorokról a következő általános képet alkothatjuk:

A funktorok olyan „befejezetlen", „kitöltésre váró" kifejezések, amelyek egy vagy több üres, kitöltetlen helyet tartalmaznak; ha az üres helyeket előírt kategóriába tartozó kifejezésekkel kitöltjük, meghatározott kategóriába tartozó összetett kifejezéseket kapunk.

Írjuk ki a példáinkban szereplő funktorokat, kipontozással jelölve a kitöltendő helyeket:

(11′) ... kószál
(12′) ... megfontoltabb, mint ...
(13′) Szerencsére, ...
(14′) ..., mert ...
(15′) ... anyja
(16′) ... + ...

A kipontozással jelölt üres helyeket *argumentumhelyek*nek, az üres helyek számát pedig a funktor *argumentumszámá*nak mondjuk. Egy funktort *egy-, két-, három-* stb. *argumentumú*nak mondunk, ha egy, két, három stb. argumentumhelyet tartalmaz.

Ha a funktor argumentumhelyeit kitöltjük, az üres helyekre kerülő kifejezéseket a funktor *argumentumai*nak vagy *bemenetei*nek, az eredményül kapott kifejezést pedig a funktor *kimenetén*ek mondjuk.

Szemléletesen és játékosan: bármely funktor egy automata, amelynek egy vagy több bemeneti nyílása (argumentumhelye) és egy kimeneti nyílása van. Ha feltöltjük a bemeneti nyílásokat, kidob valamit. De pontos előírás szabályozza, hogy melyik bemenetbe mit szabad betáplálni, és csak ennek betartása esetén kapjuk meg a kimenetből azt, amit az automata címkéje ígér. „Hamis pénzért" az automata nem ad „ehető csokoládét".

A (11′), (12′), (15′), (16′) funktorok bemenetei csak nevek, (13′) és (14′) bemenetei csak mondatok lehetnek. (Sőt, (15′) csak anyával bíró élőlény nevét, (16′) pedig csak számnevet fogad el értelmes bemenetnek.) A kimenet (11′), (12′), (13′) és (14′) esetén mondat, (15′) és (16′) esetén név.

Megjegyzés: Tankönyvünk előszeretettel fordul példákért Milne, Lázár Ervin mesefiguráihoz, mesekönyveihez. Az olvasó több „micimackós", „vacskamatis" játékos példát talál (mint (11), (12)) a továbbiakban is. Az elemzés „komolyságát" reméljük, nem befolyásolja a választott példaanyag. Aki más példákat szeretne, válassza például (11) helyett: Mária énekel, Péter sportol, (12) helyett: Klári szebb, mint Kati, a Duna hosszabb, mint a Tisza stb. A továbbiakban ugyanaz az elemzés vonatkozik rájuk, mint amit (11), (12)-ről adtunk.

2.5. A FUNKTORKATEGÓRIÁK

Az elmondottak alapján már hozzáláthatunk a funktorok kategóriákba sorolásához.

Egy funktor kategóriáját a következő adatok határozzák meg: (a) argumentumszáma, (b) bemenetének, illetve többargumentumú esetben minden egyes bemenetének kategóriája, (c) kimenetének kategóriája. Kevésbé pontosan, de tömören: egy funktor kategóriáját ismerjük, ha tudjuk, mik lehetnek a bemenetei, és mi a kimenete. (A 'mik' és a 'mi' itt természetesen úgy értendő, hogy milyen kategóriájú kifejezések.)

Egy funktort homogénnak (egyneműnek) mondunk, ha valamennyi bemenete azonos kategóriájú. Eddigi példáinkban csak homogén funktorokat említettünk.

A homogén funktorok legfontosabb típusai:

(I) *Mondatfunktorok,* amelyek mondatokból mondatokat képeznek.
(II) *Névfunktorok,* amelyek nevekből neveket képeznek.
(III) *Predikátumok,* amelyek nevekből mondatokat képeznek.

Mindegyik típuson belül tovább osztályozunk argumentumszám szerint.

Elvileg egy negyedik típus is lehetséges: olyan funktor, amely egy vagy több mondatból nevet képez. Némi töprengéssel erre is találhatunk példát:

(17) **Az, aki fölfedezte, hogy** a bolygók elliptikus pályán keringenek a Nap körül.

Ez a leírás nyilván Johann Keplert óhajtja megnevezni. Az aláhúzott rész után egy mondat következik; ezért az aláhúzott kifejezés olyan funktor, amely mondatból nevet képez (annak a nevét, aki fölfedezte, hogy a mondat igaz állítást fejez ki). A példában szereplő argumentum helyett más tudományos állítást kifejező mondatot is tehetünk argumentumként.

De a (17)-ben szereplő funktor maga is összetett kifejezésnek látszik, eltérően előbbi példáinktól, amelyekben olyan funktorokat említettünk, amelyeket aligha lehet további értelmes részekre tagolni. A magyar nyelvben nincs olyan egyszerű (tovább már nem bontható) funktor, amely mondat(ok)ból nevet képezne. Ezért e negyedik funktortípussal tovább nem foglalkozunk. Ami a (17) alatti leírást illeti, logikai szerkezetének feltárására más utat követünk, mint amelyet az itt bemutatott felbontás (funktorra és argumentumra) sugalmaz.

A következő példamondatban kétargumentumú, inhomogén (nem egyneműű) funktor szerepel:

Péter **úgy tudja, hogy** Mária elutazott.

Az 'úgy tudja, hogy' olyan funktor, amelynek első argumentuma név, második argumentuma pedig mondat lehet, kimenete pedig mondat.

Eddigi példáinkból úgy tűnhet, hogy a funktorok bemeneteként és kimeneteként csak nevek és mondatok jöhetnek számításba. Nem ez a helyzet, amint a következő példák tanúsítják.

Mikkamakka **álmodozva kószál.**

Itt az 'álmodozva kószál' nyilvánvalóan egyargumentumú predikátum. De a (11) példából tudjuk, hogy a 'kószál' – amely az előbbiben részként szerepel – ugyancsak egyargumentumú predikátum. Következésképp az 'álmodozva kószál' olyan *összetett* egyargumentumú predikátum, melynek egyik alkatrésze a 'kószál' predikátum. A benne szereplő másik szó funktornak tekinthető:

álmodozva ...,

melynek argumentumaként szóba jöhet bármely, igével kifejezett predikátum, pl. 'dalolgat', 'öltözködik', vagy akár 'követi Vacskamatit'. Tehát az 'álmodozva' igemódosító olyan funktor, amely egyargumentumú predikátumból egyargumentumú predikátumot képez.

(18) **A diákok többsége** idejében levizsgázott.

E mondatban 'a diákok többsége' olyan funktornak tekinthető, amely egyargumentumú predikátummal kitöltve mondatot eredményez. A példában az 'idejében levizsgázott' bemenetet szerepeltettük, de például a következők is alkalmasak: 'szorgalmas', 'leány', 'sportol', 'nem visel szemüveget'. (Győződjünk meg róla, hogy ezek mind egyargumentumú predikátumok!)

Azonban 'a diákok többsége' funktor is összetettnek tűnik, és a (18) mondat bizonyára másképp is elemezhető. E funktortípusra sem tudunk adni egyszerű, tovább már nem bontható magyar nyelvi példát.

Bármely többargumentumú funktorból eggyel alacsonyabb argumentumszámú funktort nyerhetünk, ha valamely argumentumhelyét kitöltjük. Az ilyen funktorok azonban már *összetettek*nek tekinthetők. *Primitív* funktoroknak azokat a funktorokat nevezzük, amelyek már nem bonthatók tovább funktorra és argumentumra. Például (12)-ben a 'megfontoltabb, mint' kétargumentumú primitív predikátum, viszont

Mikkamakka megfontoltabb, mint ...

és

... megfontoltabb, mint Vacskamati

egyargumentumú, de összetett predikátumok.

Vegyünk egy mindennapibb példát.

(12a) A Mátra magasabb, mint a Gellért-hegy.

A 'magasabb, mint' kétargumentumú primitív predikátum, viszont a 'Mátra magasabb, mint...' és a '...magasabb, mint a Gellért-hegy' egyargumentumú, de összetett predikátumok.

Egy hasznos, de a továbbhaladáshoz nélkülözhető megjegyzés: Minden funktort tekinthetünk *egyargumentumúnak* is azzal, hogy ha ténylegesen többargumentumú, akkor első argumentumával kitöltve, eredményül funktort kapunk. Például (12)-ben és (12a)-ban a 'megfontoltabb, mint' és a 'magasabb, mint' kifejezést kétargumentumú predikátumnak minősítettük, de semmi kivetnivaló nem lenne abban, ha valaki azt mondaná, hogy ez olyan egyargumentumú funktor, amely argumentumával kitöltve (ami név lehet), egyargumentumú predikátumot eredményez. A nehézkes fogalmazás indokolja, hogy miért beszélünk inkább többargumentumú funktorokról.

Logikai tanulmányainkban csak olyan homogén funktorokkal foglalkozunk, amelyek be- és kimeneteként csak nevek és mondatok jöhetnek számításba. De könnyen hibáznánk, ha nem tudnánk, hogy másfajta funktorok is léteznek. Ezért nem volt haszontalan, hogy ezekről is említést tettünk.

A helyes következtetés szempontjából alapvető jelentőségű az állításokat kifejező mondatok logikai szerkezetének föltárása. E célból ki kell keresnünk a mondat *fő (domináló)* funktorát és ennek argumentumait, majd az argumentumokat kell tovább bontanunk funktorra és argumentum(ok)ra, és így tovább. Tanulmányaink fő célja, hogy e felbontás – azaz a *logikai elemzés* legfontosabb fogásaival megismerkedjünk.

A logikai grammatika kategóriáinak áttekintése	
Alapkategóriák	kijelentő mondat (röviden: mondat) individuumnév (röviden: név)
Funktorkategóriák Fontosabb fajtái: Predikátumok (nevekből mondatokat képeznek) Mondatfunktorok (mondatokból mondatokat képeznek) Névfunktorok (nevekből neveket képeznek) A funktorok lehetnek egy- vagy többargumentumúak.	

Ellenőrző kérdések

2.1. Mi a különbség és mi a kapcsolat a kijelentő mondat és az állítás között?

2.2. Hogyan lehet egyértelművé tenni a kijelentő mondatok információtartalmát?

2.3. Melyek az állításokra vonatkozó logikai alapelvek?

2.4. Jellemezze az individuumnevek kategóriáját! Melyek az alkategóriái, és mi jellemzi ezeket?

2.5. Mi a feltétele annak, hogy egy leírás megnevezzen egy individuális objektumot?

2.6. Melyek a logikai grammatika alapkategóriái? Mi a funkciójuk az alapkategóriákba tartozó kifejezéseknek?

2.7. Milyen kifejezéseket nevezünk funktoroknak?

2.8. Hogyan osztályozzuk a funktorokat? Említsen különböző osztályozási szempontokat is!

2.9. Mit értünk egy funktor argumentumhelyein, argumentumszámán, argumentumán, bemenetén és kimenetén?

2.10. Mikor mondunk egy funktort homogénnek, illetve inhomogénnek?

2.11. Jellemezze a mondatfunktorokat, a névfunktorokat és a predikátumokat!

Gyakorló feladatok

2.1. Az alábbi mondatok közül melyek fejeznek ki állítást?

a) Budapesten, 1986. május elsején sütött a Nap.

b) Egynél több páros törzsszámnak kell lennie.

c) „Hol voltál, Ádám?"

d) „Én kérem, a világháborúban."

e) Ami nem azonos önmagával, az különbözik minden mástól is.

f) Van-e ennek valami értelme?

g) Minden szám osztható vagy kettővel, vagy hárommal.

h) „Semmi nem ugyanaz többé."

i) A Vénusz azonos az Esthajnalcsillaggal.

j) Vedd tudomásul, hogy ami egyáltalán elromolhat, az el is romlik!

Amelyik mondat nem fejez ki állítást, annál indokoljuk meg, hogy miért nem. Ha valamelyik önmagában nem fejez ki állítást, de alkalmas kontextusban igen, akkor adjunk meg hozzá ilyen kontextust. [2:1,2,3.]

2.2. Vannak-e az alábbi mondatok között olyanok, amelyek ugyanazt az állítást fejezik ki?

a) Senki nem ment el, aki Alinak hiányzott volna.

b) Aki Alinak hiányzott, nem ment el.

c) Aki elment, Alinak nem hiányzott.

d) Ha soha nem indulsz el, nem jutsz el sehová.
e) Ha eljutsz valahová, akkor valamikor elindulsz.
f) Ha nem jutsz el sehová, akkor el sem indulsz.
g) Itt van a kutya elásva.
h) Ezen a helyen hantolták el az ebet.

2.3. Keressük ki az individuumneveket az alábbi mondatokban!

a) Tigris jobban tájékozódik az erdőben, mint Nyuszi, Róbert Gida medvéje és annak barátja együttvéve.

b) A csősz mindenkit elkerget a pázsitról a Városmajorban.

c) A nyúl a rókától, a róka pedig a vadásztól tart leginkább a most felolvasott mesében.

Válogassuk ki a nevek közül a tulajdonneveket, a leírásokat és a névmásokat! Mi a feltétele annak, hogy az előforduló leírások egy-egy objektumot nevezzenek meg? [2:4,5.]

2.4. Keressük ki a funktorokat az alábbi mondatokban!

a) Éva csinos.
b) Juli csintalanabb, mint Éva.
c) Márta pulóvere piros.
d) Aladár Ábel és Alfonz között ül.
e) Klotild a legokosabb, vagy Béla okosabb, mint Klotild.
f) A dohányzás ártalmas az egészségre.
g) Ha Ádám megjön, Éva elmegy.
h) Mária fiatal.
i) Mária fiatal nagymama.

Minden föllelt funktor után írjuk föl, zárójelekkel közrefogva, az argumentumát (argumentumait) is. [2.7, 2.9.]

2.5. A 2.4. feladat funktorait csoportosítsuk argumentumszám szerint! A többargumentumú funktorok közül melyek homogének és melyek inhomogének? Vannak-e a szereplő funktorok között névfunktorok? Hát mondatfunktorok? Melyek közülük a predikátumok? [2.8, 2:10,11.]

3. SZEMANTIKAI ÉRTÉKEK

Már említettük, hogy a nyelv alapvető funkciója az információ közlése, befogadása és feldolgozása. E funkcióját a nyelv annak révén tudja ellátni, hogy mondatai és más (kategóriákba sorolt) kifejezései sajátos kapcsolatban vannak a nyelven kívüli világgal. Ezt a sajátos kapcsolatot a nyelvet használó közösség teremti meg és fejleszti tovább a nyelvhasználat gyakorlatában. Anyanyelvünket úgy sajátítottuk el, hogy környezetünktől megtanultuk: milyen szavakat, szócsoportokat, mondatokat használ a magyar nyelvi közösség a külső világ jelenségeinek, eseményeinek, összefüggéseinek stb. *közlése* (kommunikálása) során.

A nyelv és a külső világ sajátos kapcsolatát azzal a megállapítással fejezzük ki, hogy *a nyelv bizonyos kifejezései szemantikai értékkel rendelkeznek.* (Szemantika = jelentéstan.) Az ilyen kifejezéseket nevezzük *értelmeseknek* vagy *jól formáltak*nak. (Beszédhangok összevisszaságával értelmetlen kifejezéseket példázhatunk: plüc, botu, maha, prst stb.). A nyelvtan éppen a jól formált kifejezések meghatározásával foglalkozik. A szemantikai érték a kifejezésnek nem önmagában vett sajátsága, hanem a nyelvhasználat gyakorlatából ered, tehát nem természeti, hanem társadalmi jellegű.

Megjegyzés. A nyelvfilozófiában néha megkülönböztetik a kifejezések jólformáltságát és értelmességét. Eszerint előfordulhat, hogy egy kifejezés értelmes, de nem jól formált (nyelvtanilag hibás), például 'a szobába vagyok'. Nyilvánvaló, hogy ez az eset a logika szempontjából érdektelen: ha egy kifejezés a magyar nyelvtan szerint hibás, ám (jóindulattal) mégis megértjük, akkor a kijavított változatával foglalkozunk tovább. Egyesek szerint az is előfordulhat, hogy egy kifejezés nyelvtanilag hibátlan (jól formált), mégis értelmetlen: 'kérődző asztal', 'a grófnő felesége', 'öntudatosan alszik'. Az igaz, hogy kérődző asztalok nincsenek, nőnek nem lehet felesége, és senki sem alhat öntudatosan. De ezt éppen az idézett kifejezések jelentése alapján tudjuk, s ezért fölösleges elvitatni értelmességüket. (Nem is szólva arról, hogy rendszeresen találkozunk költői szövegekben ilyen szófordulatokkal: „az édes álom pillangó képében", „a semmi ágán ül szívem", „tapsikolnak a jázminok").

Többfajta szemantikai értéket különböztetünk meg. Ezek egyike a *jelentés.* A legtöbb jól formált kifejezésnek van jelentése. (A kivételekről később szólunk.) Ha valamit megértünk, azt úgy is mondhatjuk, hogy felfogtuk a jelentését. A nyelvtudományban gyakran így fogalmaznak: Egy kifejezés jelentése nem más, mint helyes – a kommunikáció szempontjából eredményes – használatának szabálya.

A logikát a szemantikai értékek – köztük a jelentés – annyiban érdekli, amennyiben hozzájárul a helyes következtetés fogalmának tisztázásához. E célra a jelentés iménti meghatározása nem megfelelő. A jelentés általános fogalmába érzelmi, hangulati, stiláris és egyéb mozzanatok is tartoznak. A logika szempontjából ezek érdektelenek, sőt zavaróak. Ezért a logikában egy szűkített jelentésfogalmat használunk, amelyet, megkülönböztetésül, *intenzió*nak fogunk mondani. Meghatározását, más szemantikai értékek értelmezésével együtt, kategóriánkénti tagolásban fogjuk megadni.

3.1. A MONDATOK SZEMANTIKAI ÉRTÉKEI

Kijelentő mondataink többségében rendszeresen szerepelnek többértelmű vagy homályos, elmosódó jelentésű szavak. Ha a mondatot mégis megértjük, ez azon az áron történik, hogy ezeket a szavakat valahogyan egyértelműsítjük. Ezt az egyértelműsítő eljárást nevezzük *interpretáció*nak. (Interpretáció: magyarázat, tolmácsolás.) Kommunikációs zavar keletkezik, ha a közlő és a befogadó nem egyformán interpretálja a mondatokat.

Egy interpretált mondat intenzióján azon feltételek összességét értjük, amelyek mellett a mondat igaz állítást fejez ki.

Illusztrációként tekintsük a következő mondatot:

(1) Elolvastam a leveledet.

Ebben az 'elolvas' ige a magyar anyanyelvűek számára eléggé egyértelmű, nem kell tovább interpretálni. A 'levél' értelmét itt nyilván nem 'falevél'-ként interpretáljuk, hanem mint 'személyhez szóló írásküldemény'-t. A 'leveled' szó a birtokos személyrag miatt nem egyértelmű; érthető mint 'levél, amely a te tulajdonod, illetve neked szól', vagy mint 'levél, amelyet te írtál nekem'. Tegyük föl, hogy az utóbbi interpretációt fogadjuk el. Ekkor a mondat tartalmát így fogalmazhatjuk át:

(1′) Az x személy a t időpontnál korábban elolvasta azt a levelet, amelyet (korábban) y írt x-nek.

A konkrét információtartalom megértéséhez tudnunk kell még, hogy az (1)-ben (rejtetten) szereplő 'én' és 'te' kit jelöl, és hogy maga a mondat mikor hangzott el. Másképp: ismerni kell az (1′)-ben szereplő x, y, t szimbólumok *értékeit*. Az *interpretált* (1) mondat tehát még nem tartalmaz egyértelmű információt, mert olyan szavak, illetve toldalékok szerepelnek benne, amelyek ugyan *nem szorulnak interpretációra* (személyragok és az ige időjele), de a mondat különböző használatai során más és más személyt, illetve időpontot jelölhetnek. Az interpretált

mondat konkrét információtartalmának megértéséhez szükséges adatok megadását a mondat *értékelésének* fogjuk nevezni. Az értékelés rögzíti az esetleges időadatokat és azt, hogy az előforduló névmások kiket-miket jelölnek.

Az (1′) vázlatunkban szerepel az 'a levél, amelyet (korábban) y írt x-nek' leírás. Az x, y, t értékelése után e leírás egy egyedi levelet óhajt megnevezni, tehát a név kategóriába tartozik. Mármost a tényektől függ, hogy ez az óhaj teljesül-e (írt-e az y-nal jelölt személy a t időpont előtt x-nek egy és csak egy levelet, vagy sem). Negatív esetben a név nem jelöl semmit, és ennek következtében (1′)-nek az értékelés dacára sincs információtartalma.

Ha az interpretált és értékelt mondatnak határozott információtartalma van, azaz állítást fejez ki, akkor van egy másik szemantikai értéke is, nevezetesen *igazságértéke.* Megértve a mondat információtartalmát, azt is tudjuk, hogy mik a további feltételei annak, hogy a mondat *igaz* legyen. Ez azonban nem jelenti azt, hogy *el is tudjuk dönteni* a mondat kifejezte állítás igazságértékét, azaz igaz vagy hamis voltát. Lehet, hogy ez olyan vizsgálatokat igényelne, amelyeket nem tudunk elvégezni. (Különösen ez a helyzet a múltra vagy a jövőre vonatkozó állítások esetén.)

A használat körülményei nemcsak a mondatok, hanem a szavak és a funktorok szemantikai értékeinek vizsgálatában is szerepet játszhatnak. A névmások és az időadatok *értékelése* tehát bármely kategória esetén szükségessé válhat.

Mint példánk mutatja, azon feltételek összessége, amelyek mellett valamely interpretált mondat igaz állítást fejez ki, két részre bontható: (a) A mondat használatának körülményei (időadatok, névmások értékei); ezek rögzítését mondjuk *értékelés*nek. (b) Tényfeltételek. A mondatot akkor értjük, ha e feltételek mindkét csoportját ismerjük.

A feltételek első vagy mindkét csoportja üres is lehet:

A mohácsi csata 1526-ban volt.

Ezt a mondatot csak interpretálni kell, értékelendő alkatrészt nem tartalmaz. Igazságértékét pusztán a tények határozzák meg.

$7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$

Ha ezt aritmetikai állításként olvassuk (és másként aligha olvashatjuk), a megszokott tízes számrendszerben, még interpretálni sem kell, s még kevésbé értékelni. Igazságértéke pusztán a benne szereplő aritmetikai fogalmakon múlik, a fizikai világ tényei nem befolyásolják.

(2) Az agglegények mind nőtlenek.

Normálisan interpretálva a szavakat, e mondat igazságát pusztán a benne szereplő szavak jelentése alapján megállapíthatjuk. A fizikai világ tényei itt sem játsza-

nak szerepet. Legföljebb ennyit mondhatunk: (2) igazsága nyelvhasználati tény. Hasonló áll a következőre is:

Március után szeptember következik.

Ez az állítás a naptári konvenciók szerint hamis.

3.2 A NEVEK SZEMANTIKAI ÉRTÉKEI

Mint tudjuk, a nevek funkciója az, hogy valamely egyedi dolgot (személyt, tárgyat vagy elvont dolgot) megnevezzenek, jelöljenek. A név jelölte dolgot – ha van ilyen – a név *jelölet*ének mondjuk. *A jelölet a név egyik lehetséges szemantikai értéke.* Tudjuk, hogy némely, nyelvtanilag névnek számító kifejezés semmit sem jelöl, azaz *nincs jelölete.* Ez elsősorban a leírásokkal fordulhat elő. Irodalmi művekben, legendákban, hitregékben olyan *tulajdonnevek* is szerepelhetnek, amelyeknek a *valóságban* nincs jelöletük, de a mű *elképzelt világában* természetesen van.

Az összetett nevek – elsősorban a leírások – gyakran éppúgy interpretációra (és esetleg értékelésre) szorulnak, mint a mondatok. *Egy interpretált név intenzióján* a név jelöletét meghatározó feltételek összességét értjük, beleértve azon feltételeket is, amelyek mellett a névnek egyáltalán van jelölete. Ha például a 'Péter' név jelöletét már rögzítettük, akkor a

Péter fivére

leírás akkor és csak akkor jelöl, ha Péternek egyetlen férfitestvére van, s ha e feltétel teljesül, akkor ezt az egyetlen fivérét jelöli. Ha interpretáljuk a

Franciaország királya

leírást, a jelöletét meghatározó feltételek közé számít azon időpont megadása is, amelyre a leírás használata vonatkozik. Az 'anyám' név jelöletét meghatározó feltételek között pedig szerepel az 'én' névmás jelöletének rögzítése is. Mint a mondatok esetén, a használati körülményekre vonatkozó adatok megadását itt is *értékelésnek* mondjuk. Egy név intenzióját szokás *individuális fogalom*nak mondani.

Különleges helyzetük van a névhasználati megállapodással bevezetett *tulajdonneveknek.* Egy tulajdonnév *interpretálásán* azt értjük, hogy jelöletét valamilyen módon – rámutatással vagy egy alkalmi leírással – meghatározzuk. Ebből következik, hogy a *tulajdonneveknek nincs intenziójuk.* Hiszen – meghatározásunk szerint – egy (interpretált) név intenziója éppen a jelöletét meghatározó feltételek összessége; ám a tulajdonnév jelöletét már az interpretáció megadja. Ez teljes összhangban van azzal a ténnyel, hogy például az

a Föld legmagasabb hegycsúcsa

leírást lényegében anyanyelvi ismereteink alapján megértjük (s így elvileg meghatározott, hogy van-e jelölete, s ha igen, akkor mit jelöl), míg azt, hogy a 'Csongrád' szó földrajzi tulajdonnév, kizárólag földrajzi ismereteinkből tudjuk; anyanyelvi ismereteink semmi támpontot nem adnak a jelölet meghatározásához. A tulajdonnevek alkotják azt a nevezetes kivételt, amelyről e fejezet elején szóltunk: a tulajdonneveknek nincs jelentésük. (Ezen nem változtat az a tény, hogy a tulajdonnevek is jelentéssel bíró szavakból *származnak*, mert az eredeti jelentés többnyire nem közismert, de még ha ismert is, akkor sem elég a jelölet meghatározásához. Hiába tudjuk, hogy a szláv eredetű 'Csongrád' jelentése 'fekete vár', ez nem határozza meg e név jelenlegi jelöletét.

Előfordul, hogy egy hosszabb leírás rövidítésére vezetnek be tulajdonnevet. Például a fizikában az

a fény sebessége vákuumban

leírást a '*c*' szimbólummal rövidítik. Az ilyen tulajdonnév átveszi annak a leírásnak az intenzióját, amelyet rövidít.

Mivel egy (interpretált) mondat igazságértéke és egy (interpretált) név jelölete általában a tényektől is függ, e két szemantikai értéket közös néven *faktuális érték*nek mondjuk. (Factum: tény.) Tehát egy *mondat* faktuális értékén *igazságértékét*, egy *név* faktuális értékén *pedig jelöletét* értjük. A faktuális érték (mindkét kategória esetén) néha hiányozhat. A faktuális érték fogalmát egyes funktorfajtákra is ki fogjuk terjeszteni.

3.3 EXTENZIONÁLIS ÉS INTENZIONÁLIS FUNKTOROK

Egy *interpretált funktor intenzióján* azt a szabályt értjük, amely bemenetének (illetve bemeneteinek) intenziójából meghatározza, „kiszámítja" kimenetének intenzióját. Az interpretált és (szükség esetén) értékelt funktor *intenzióját* szokás *általános fogalomnak* nevezni. (Az 'általános' jelző az egyedi fogalmaktól – a leírások intenzióitól – való megkülönböztetésre szolgál.) A predikátumok intenzióit *predikatív*, a névfunktorok intenzióit pedig *műveleti* fogalmaknak mondhatjuk.

Ha egy funktorban minden argumentumhelyet kitöltünk, végső kimenetként mindig nevet vagy mondatot kapunk. (Hiszen ha a kimenet még funktor, akkor az is kitölthető argumentummal, tehát ez még nem lehet a „végső" kimenet.) Így a teljesen kitöltött funktorkimenetnek – interpretáció és értékelés után – többnyire van faktuális értéke. Szorítkozzunk először olyan funktorokra, amelyek argumentumai nevek vagy mondatok lehetnek. Ezeknek az argumentumoknak van

faktuális értékük. Vizsgáljuk meg, hogy van-e összefüggés a bemenetek és a kimenet faktuális értékei között.

Az alábbi mondatokban szereplő nevek A. A. Milne *Micimackó* c. könyvében fordulnak elő.

(4) Micimackó Fülesnek szánt ajándékáb**a éppen belefér** a kidurrant léggömb.
(5) Az üres mézescsupor**ba éppen belefér** a kidurrant léggömb.
(6) Micimackó Fülesnek szánt ajándékáb**a éppen belefér** Malacka Fülesnek szánt ajándéka.
(7) Az üres mézescsupor**ba éppen belefér** Malacka Fülesnek szánt ajándéka.

Mind a négy mondatban a '-ba éppen belefér' kétargumentumú predikátum szerepel. Az idézett könyv szellemében interpretálva a mondatokat, azt találjuk, hogy a következő két leírás faktuális értéke (jelölete) azonos:

(8a) Micimackó Fülesnek szánt ajándéka,
(8b) az üres mézescsupor.

Ugyanez igaz a következő két leírásra is:

(9a) Malacka Fülesnek szánt ajándéka,
(9b) a kidurrant léggömb.

Tehát mind a négy mondat egyazon *x* dologról állítja, hogy abba éppen belefér egy bizonyos *y* dolog, a különbség köztük csak az, hogy *x*-et hol (8a)-val, hol (8b)-vel írják le, és *y*-t egyszer (9a)-val, máskor (9b)-vel nevezik meg. De az, hogy egyvalamibe belefér-e egy másik valami, nyilván nem függ attól, hogy a két dolgot hogyan nevezzük meg. Ennélfogva a (4), ..., (7) mondatok igazságértéke megegyezik (vagy mind igaz, vagy mind hamis; az idézett könyv világában mind igaz). Jegyezzük meg, hogy itt az azonos jelöletű leírások *intenziója* különböző, és ezért jelöletük lehetne különböző is. Így (8a) és (8b) intenziója nem azonos, tehát jelöletük *lehetne* különböző is, bár a mesében azonos; például Micimackó Fülesnek szánt ajándéka *lehetne* három teli csupor méz is. Ugyanígy (9a) és (9b) intenziója is különböző, ezért jelöletük is *lehetne* különböző, bár a mese szerint azonos (Malacka Fülesnek szánt ajándéka lehetne egy csokor szamárkóró is). Ezekből következik, hogy a példánkban szereplő négy mondat intenziója is különböző, s ennek folytán igazságértékük is *lehetne* különböző (bár Milne történetében mind a négy mondat igaz).

Megfigyelésünk eredményét így összegezhetjük: A kétargumentumú

...-ba/-be éppen belefér ...

predikátum kimenetének faktuális értékét egyértelműen meghatározza bemeneteinek faktuális értéke. Ha valamely bemenetét fölcseréljük egy azonos jelöletű névvel,

a kimenet igazságértéke nem változik. Az ilyen funktorokat *extenzionális funktoroknak* fogjuk mondani.

Vegyünk egy egyszerűbb példát:

A Duna a Fekete-tengerbe ömlik.

Az 'a Fekete-tengerbe ömlik' predikátum 'Duna' argumentuma helyett írjuk a vele azonos jelöletű 'Magyarország leghosszabb folyója' argumentumot. Világos, hogy a kimenet, azaz:

Magyarország leghosszabb folyója a Fekete-tengerbe ömlik

faktuális értéke változatlan marad.

A következő példa mutatja, hogy nem minden predikátum extenzionális:

(10) Péter ismeri a körzeti orvost.

Az 'ismeri' predikátumot interpretáljuk úgy, hogy egy személy egy megnevezett személyt vagy tárgyat akkor ismer, ha *tudja,* hogy a név kit-mit jelöl. (Többnyire ebben az értelemben használjuk e predikátumot.) Nem vitás, hogy itt az első argumentum – 'Péter' – kicserélhető bármely más azonos jelöletű névvel a mondat igazságértékének megváltozása nélkül. De nem így a második argumentum, az ige tárgya. Alkalmas interpretációban előfordulhat, hogy 'a körzeti orvos' leírás ugyanazt a személyt jelöli, mint 'a bélyegklub titkára', ámde a

(11) Péter ismeri a bélyegklub titkárát

igazságértéke nem feltétlenül azonos (10) igazságértékével; hiszen lehetséges, hogy Péter tudja, kit jelöl 'a körzeti orvos' leírás, de nem tudja, hogy ugyanazt jelöli, mint 'a bélyegklub titkára' (röviden, nem tudja, hogy a körzeti orvos *azonos* a bélyegklub titkárával). Tehát megeshet, hogy (10) igaz és (11) hamis (és persze fordítva is).

Az ilyen természetű funktorokat *intenzionális* funktoroknak mondjuk. A példánkban szereplő

... ismeri ...-t

predikátum, pontosabban szólva, első argumentuma szerint extenzionális, második argumentuma szerint intenzionális. Az egyargumentumú összetett

Péter ismeri ...-t

predikátum viszont minden megszorítás nélkül intenzionális. A '... keresi ...-t'

kétargumentumú predikátumot is lehet úgy interpretálni, hogy második argumentuma szerint intenzionális legyen.

Egy funktort intenzionálisnak mondunk, ha bemeneteinek faktuális értéke nem határozza meg egyértelműen kimenetének faktuális értékét, azaz ha kimenetének faktuális értéke némely bemenetének intenziójától is függ.

A mondatfunktorok között ugyancsak találunk extenzionálisakat is és intenzionálisakat is. Az egyargumentumú

nem igaz, hogy ...

funktor igaz bemenet esetén hamis, hamis bemenet esetén igaz kimenetet ad (próbáljuk ki példákkal), tehát kimenetének igazságértéke kizárólag a bemenet igazságértékétől függ. E funktor tehát *extenzionális.* Viszont a

lehetetlen, hogy ...

mondatfunktor *intenzionális.* Tekintsük argumentumaként a következő hamis mondatokat:

(12) A jelenlegi brit miniszterelnök nő.
(13) $2 \cdot 2 = 5$.
(14) Van olyan állítás, amely igaz is és hamis is.
(15) A magyar kormány székhelye Debrecen.

(Ezek közül (12) és (15) *jelenleg* hamis, (13) és (14) viszont értékeléstől függetlenül – mindig – hamis.) Elébük fűzve a 'lehetetlen, hogy' kifejezést, (13)-ból és (14)-ből igaz állítást kapunk, de (12) és (15) esetén az eredmény *hamis.* Ugyanis semmiképp sem tartozik a lehetetlenségek közé, hogy Nagy-Britanniának (jelenleg) nő legyen a miniszterelnöke. És kormányunk székhelye is lehetne éppen Debrecen (akár jelenleg is); történelmünk során erre legalább két ízben volt is példa. Tehát a 'lehetetlen, hogy' mondatfunktor hamis mondatból néha igazat, néha hamisat képez, vagyis bemenetének faktuális értéke nem mindig határozza meg kimenetének faktuális értékét. E funktor tehát valóban intenzionális. (De ha bemenete *igaz,* akkor kimenete egyértelműen hamis. Próbáljuk ki példákkal, és magyarázzuk meg, miért van így!)

A kétargumentumú mondatfunktorok közül extenzionális például a mondatokat összekapcsoló 'és', viszont intenzionális a 'mert'.

(16) Péter elment, *és* Mária megjött.

Az 'és' normális értelmezése mellett e mondat igaz, ha mindkét tagmondata igaz, és hamis, ha egyik vagy mindkét tagmondata hamis. Tehát a bemenetek igazságértéke egyértelműen meghatározza a kimenet igazságértékét.

(17) Péter nyugtalan volt, *mert* Mária késett.

E példában a két tagmondat mindegyike igaz lehet, anélkül hogy az összetett mondat igazságértéke ezáltal meghatározódna. Tegyük föl, hogy Péter valóban nyugtalan volt, és Mária valóban késett. Ebből még nem tudhatjuk, hogy Péter *azért* volt-e nyugtalan, *mert* Mária késett. Lehet, hogy azért, lehet, hogy másért. Tehát e funktor intenzionális. (Tudunk-e mondani valamit (17) igazságértékéről, ha valamelyik tagmondata hamis?)

A névfunktorok nagyrészt extenzionálisak (mint az aritmetikai funktorok). Intenzionális névfunktorra csak összetett példát tudunk mutatni:

(18) Az, aki nem tudja, hogy ... írta az *Elcserélt fejek*et.

A kipontozott argumentumhelyre írjuk például a 'Thomas Mann', illetve 'a *Mario és a varázsló* szerzője' nevet. Tegyük föl, hogy mindkét így kapott leírásnak van jelölete. Bár Thomas Mann azonos a *Mario és a varázsló* szerzőjével – vagyis a két argumentum faktuális értéke azonos – a két kimenet faktuális értéke lehet különböző. A (18) alatti névfunktor tehát intenzionális.

Inhomogén funktorok között is akad intenzionális:

... úgy tudja, hogy ...

Ennek első argumentuma név, második argumentuma pedig mondat lehet. E funktor első argumentuma szerint extenzionális, a másodikra nézve viszont intenzionális. Valóban, a következő két mondat igazságértéke lehet különböző:

Péter úgy tudja, hogy az indiánok Indiában élnek,
Péter úgy tudja, hogy Peru fővárosa Santiago,

noha a 'hogy' utáni argumentum mindkét esetben azonos faktuális értékű – éspedig hamis – mondat.

A faktuális érték fogalmát kiterjesztjük az *extenzionális* funktorokra is. *Egy extenzionális funktor faktuális értékén azt a szabályt értjük, amely a bemenetek faktuális értékéből meghatározza, „kiszámítja" a kimenet faktuális értékét.*

Például a (16)-ban szereplő 'és' faktuális értéke a következő kiszámítási szabály: A kimenet igaz, ha mindkét bemenet igaz, és a kimenet hamis, ha egyik vagy mindkét bemenet hamis. De e témával a 4. és 5. fejezetben foglalkozunk részletesebben.

Tekintsük most a következő mondatot:

(19) Mária vörös hajú tanítónő.

Ebben a 'vörös hajú tanítónő' egyargumentumú extenzionális predikátum. Mivel

a 'tanítónő' is ugyanebbe a kategóriába tartozik, megállapíthatjuk, hogy itt a 'vörös hajú' olyan funktor, amely (főnév alakú) predikátumból predikátumot képez. De persze úgy is felfoghatjuk, hogy a 'vörös hajú' kétargumentumú funktor:

... vörös hajú ...;

első argumentuma név, második argumentuma pedig (főnévi) predikátum lehet. E funktor második argumentuma szerint is extenzionális. Ezt így láthatjuk be. Tegyük föl, a példa kedvéért, hogy a 'tanítónő' és a 'könyvtáros' predikátumok faktuális értéke azonos, azaz hogy történetesen éppen azok a személyek tanítónők, akik egyben könyvtárosok is. Ekkor a vörös hajú tanítónők is éppen azok, akik vörös hajú könyvtárosok. A (19) mondat igazságértéke nem változik, ha benne a 'tanítónő' predikátumot változatlan faktuális értékű predikátummal cseréljük föl.

Ha (19)-ben a 'vörös hajú' jelzőt pl. a 'kiváló' vagy a 'leendő' jelzővel helyettesítjük, észrevehetjük, hogy e jelzők *intenzionális* funktorok. Mert ha véletlenül a 'tanítónő' és a 'könyvtáros' faktuális értéke azonos is, ebből nem következik, hogy a kiváló tanítónők egyben kiváló könyvtárosok is (és fordított irányban sem), s még kevésbé, hogy a leendő könyvtárosok egyben leendő tanítónők is (és fordítva sem). Tehát a

'... kiváló ...' és '... leendő ...'

funktorok, második argumentumuk szerint, intenzionálisak.

Példáink illusztrálják, hogy extenzionális és intenzionális funktorok minden funktorkategóriában megkülönböztethetők. Jegyezzük meg, hogy *az intenzionális funktoroknak nem tulajdonítunk faktuális értéket.* Ezek egyetlen szemantikai értéke intenziójuk.

3.4. EXTENZIONÁLIS LOGIKA

Tananyagunk hátralévő részében (leszámítva a 11. fejezet egy kis részletét) csak extenzionális funktorokkal foglalkozunk. A logikának azt a részét, amely az extenzionális funktorokra korlátozódik, *extenzionális logikán*ak nevezik. A pedagógiai munkában – sőt a tudományos munka nagyobb részében is – elegendő az extenzionális logika.

Az extenzionális logikára való korlátozódás *nem* jelenti azt, hogy a vizsgált mondatokban nem fordulhatnak elő intenzionális funktorok. Az esetleg előforduló intenzionális funktort bemenetével együtt egy egységként kezeljük, nem bontjuk föl funktorra és argumentumra. Így a 'leendő tanítónő' kifejezést felbonthatatlan (egyargumentumú) predikátumnak tekintjük, nem bonthatjuk tovább részekre (a 'leendő'-t funktornak, a 'tanítónő'-t pedig argumentumnak minősítve).

Az extenzionális logikában érvényes a következő szemantikai elv: *bármely összetett kifejezés faktuális értékét egyértelműen meghatározza részeinek faktuális értéke.* Érthető, hiszen az extenzionális logikában a szerkezet feltárása során csak extenzionális funktorokat különböztetünk meg.

Ebből következik egy egyszerűsítő lehetőség az *interpretáció* tekintetében: *Az extenzionális logikában a tovább már nem bontott kifejezések interpretálásakor elegendő a faktuális értékük megadása.* Így egy felbontatlan mondat interpretálásakor elég megadni az igazságértékét, egy névhez a jelöletét, egy funktorhoz azt a szabályt, amely a bemenete(i) faktuális értékéből kiszámítja a kimenete faktuális értékét.

Valójában az extenzionális logikának is csak egy fejezetével lesz dolgunk. De a további szűkítést majd később fogjuk meghatározni.

A szemantikai értékek áttekintő táblázata			
kategória		faktuális érték	az intenzió szokásos elnevezése
mondat		igazságérték	állítás
név		jelölet	egyedi fogalom
funktor	extenzionális	függvény	általános fogalom
	intenzionális	–	

Ellenőrző kérdések

3.1. Miben különbözik a jelentés logikai fogalma – az intenzió – a nyelvészet jelentésfogalmától?

3.2. Mit értünk egy interpretált mondat intenzióján?

3.3. Milyen szemantikai értékei lehetnek egy individuumnévnek? Mely szemantikai érték hiányozhat egyes esetekben?

3.4. Hogyan értelmeztük a faktuális érték fogalmát a mondatok, és hogyan a nevek kategóriájában?

3.5. Hogyan különböztetjük meg az extenzionális és az intenzionális funktorokat?

3.6. Milyen szemantikai értékük lehet az extenzionális és az intenzionális funktoroknak?

3.7. Hogyan jellemezhetjük az extenzionális logikát? Melyek azok a problémák, amelyek vizsgálatával nem foglalkozik?

Gyakorló feladatok

3.1. Mondjunk példákat egyező igazságértékű, de különböző intenziójú mondatokra! Lehetséges-e példa a fordított esetre, vagyis arra, hogy két mondat intenziója azonos, de igazságértékük különböző? [3.2.]

3.2. Mondjunk példát olyan mondatra, amelynek intenziója van, de faktuális értéke nincs! Állítást fejez-e ki egy ilyen mondat?

3.3. Keressünk egyező intenziójú mondatokat az alábbiak között:

a) Esik az eső, és süt a Nap.

b) Szivárvány van.

c) Nem igaz, hogy süt a Nap és nem esik az eső.

d) Nem igaz, hogy az eső sem esik, és a Nap sem süt.

e) Nem áll, hogy vagy nem esik az eső, vagy nem süt a Nap.

3.4. Mondjunk példákat azonos jelöletű, de különböző intenziójú individuumnevekre! [3.3.]

3.5. Mondjunk példákat olyan leírásokra, amelyeknek van és amelyeknek nincs faktuális értékük (jelöletük)! Keressünk olyan leírást, amelynek az ellentmondás elve alapján nem lehet faktuális értéke!

3.6. Keressük ki az alábbi mondatokból a funktorkifejezéseket! Melyek közülük az intenzionálisak, és melyek az extenzionálisak? [3.5.]

a) Péter keres egy tündért.

b) Pál talál egy boszorkányt.

c) Titusz tudja, hogy egyetlen páros törzsszám van.

d) Azt álmodtam, hogy négy vizsla kergetett három nyulat.

e) Egyesek azt állítják, hogy ha az ördögnek van felesége, akkor időnként meg is veri őt.

f) Lehetséges, hogy átmegyek a logikavizsgán.

g) Péter leendő házát nézi.

h) Péter leendő házára gondol.

3.7. A 'lehetséges' és a 'lehetetlen' szó jelentésére hivatkozva magyarázzuk meg, hogy ha igaz mondat elé fűzzük a 'lehetetlen, hogy' kifejezést, csakis hamis állítást kaphatunk!

3.8. Ha a 'mert' kötőszóval összekapcsolt két mondat egyike vagy mindkettő hamis, tudunk-e valami biztosat mondani az összetett mondat igazságértékéről?

4. EXTENZIONÁLIS PREDIKÁTUMOK

A továbbiakban predikátumon mindig extenzionális predikátumot értsünk (kivéve ha kifejezetten jelezzük az ellenkezőjét). Mint tudjuk, a predikátumok *nevekből mondatokat* képző funktorok. Argumentumszámuk szerint osztályozzuk őket.

4.1. EGYARGUMENTUMÚ PREDIKÁTUMOK

A magyar nyelvben a primitív egyargumentumú predikátumok lehetnek tárgyatlan igék, főnevek és melléknevek. Az alábbi példamondatokban aláhúzással jelöljük az (egyargumentumú) predikátumokat:

Péter **sétál.**
Mária **jön.**
Juli **óvónő.**
Öcsém **katona.**
A lakásom **kétszobás.**
Kati **kék szemű.**

Természetesen tárgyas ige is szerepelhet egyargumentumú predikátumként, ha nincs kitöltve tárgyargumentummal. (Például 'Pál olvas'.)

Összetettebb egyargumentumú predikátumokként felléphetnek melléknévi jelzős főnevek és igemódosítóval (adverbiummal) ellátott igék is: 'szőke diák', 'gyorsan fut'. Az elsőben a 'szőke' és a 'diák' önállóan is egyargumentumú predikátum. Az 'Aladár szőke diák' mondatot átfogalmazhatjuk így:

Aladár szőke, *és* Aladár diák.

Az 'és' mondatfunktor segítségével (amellyel a következő fejezetben foglalkozunk) az összetett 'szőke diák' predikátumot kiküszöböltük. Nem alkalmazható ez a fogás, ha a jelző intenzionális funktor; például a 'nyugdíjas tanár', a 'negatív szám' és az 'állítólagos gyilkos' predikátumokat az extenzionális logikában felbonthatatlanokként kell kezelnünk. Az igemódosítók általában intenzionális

funktorok, ezért a módosított igéket ('gyorsan fut', 'szépen énekel') is felbonthatatlan predikátumokként kell kezelnünk.

Ha egy mondat neveket tartalmaz, a nevek kihagyásával keletkező részét tekinthetjük funktornak, a neveket pedig argumentumoknak. Ha ez a funktor extenzionálisnak bizonyul, akkor (extenzionális) predikátumot kaptunk. Ebből láthatjuk, hogy egyargumentumú predikátumként tetszőleges bonyolultságú képződmények léphetnek föl, például:

A gólyabálon nagy feltűnést keltett ..., akivel minden fiú szeretett volna táncolni.

Mint tudjuk az előző fejezetből, bármely extenzionális funktor faktuális értéke az a szabály, amely bemenete(i)nek faktuális értékéből kiszámítja kimenete faktuális értékét. Egyargumentumú predikátum esetén egy bemenetről van szó, s az *név* lehet, a név faktuális értéke pedig valamely egyedi dolog. A kimenet viszont mondat, melynek faktuális értéke a két igazságérték valamelyike. Következésképp valamely egyargumentumú predikátum faktuális értéke az a szabály, amely megmondja, hogy a predikátum mely dolgokra igaz, és mely dolgokra hamis. Gondoljuk rögzítve a szóba jöhető egyedi dolgok halmazát, és nevezzük *tárgyalási univerzum*nak. Ekkor így fogalmazhatunk: *Bármely egyargumentumú predikátum faktuális értéke olyan függvény* (matematikai értelemben), *amely a tárgyalási univerzum minden eleméhez hozzárendeli a két igazságérték valamelyikét* (de csak egyikét). E függvény *értelmezési tartománya* a tárgyalási univerzum (a szóba jöhető dolgok halmaza), *értékkészlete* pedig az a halmaz, amely a két igazságértéket (mint absztrakt objektumokat) foglalja magában.

(Itt föltettük, hogy az olvasó középiskolai tanulmányaiból még emlékszik a *függvény* fogalmára és a hozzá kapcsolódó *értelmezési* tartomány, *értékkészlet* fogalmakra.)

Az iménti meghatározás könnyen kiterjeszthető többargumentumú predikátumokra is, csak éppen „többváltozós", azaz többargumentumú függvényekre kell gondolni. De erről később még lesz szó.

Az igazságértékeket ábrázolhatjuk a 0, 1 számokkal is, a 0-t a hamisság, az 1-et az igazság képviselőjének tekintve. Ezzel az igazságértékek osztályát így jelölhetjük: $\{0, 1\}$.

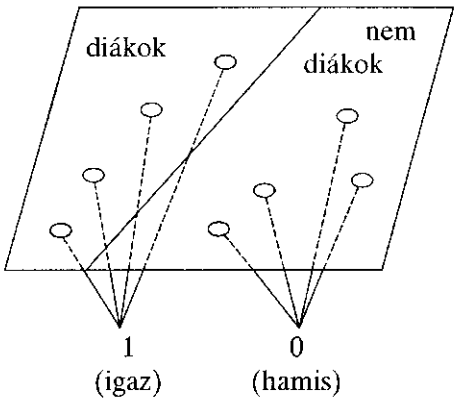
Tárgyalási univerzumként legegyszerűbb lenne az összes egyedi dolog halmazát választani. Számos érv szól e választás ellen, mindenekelőtt az, hogy az *egyedi dolog* fogalma nagyon is bizonytalan, elmosódott; vonatkozhat absztrakt dolgokra (akár intenziókra, gondolatokra, halmazokra) is. Korlátozatlan használata még logikai paradoxonokhoz is vezethet. Ezért – és később említendő más okokból is – helyesebb lesz, ha a tárgyalási univerzum fogalmát *interpretációfüggő* értelemben használjuk, azaz: amikor predikátumokat interpretálunk, mindig adjuk meg a tárgyalási univerzumot is. (Példák erre: a budapesti lakosok osztálya; a fizikai tárgyak osztálya; az emberek osztálya; az élőlények osztálya; a ter-

mészetes számok osztálya [egy matematikai érvelés során] stb.) Az ezzel kapcsolatos kikötéseink a következők:

(a) Ha egy logikai elemzésben több predikátummal is kell foglalkoznunk, ezek számára *közös* tárgyalási univerzumot adjunk meg.

(b) A tárgyalási univerzum mindig *nemüres* halmaz legyen.

A fentiek folytán a 'diák' predikátum faktuális értéke az a függvény, amely az 1 értéket rendeli a tárgyalási univerzum azon elemeihez, amelyek diákok, minden más eleméhez pedig a 0 értéket rendeli. (Emlékezve arra, hogy 1 az igazság, 0 a hamisság jele, látjuk, hogy ez a függvény éppen azt mondja meg, hogy a 'diák' predikátum a tárgyalási univerzum mely elemeire igaz.) E függvény megadásához azonban nyilván elegendő megadni a *diákok halmazát* (mint a tárgyalási univerzum egy részhalmazát). Ha egy függvény csak két értéket vehet föl, elég azt tudni, hogy mikor veszi föl az egyik értéket, ebből már azt is tudjuk, hogy mikor veszi föl a másik értéket. (Lásd az *1. ábrát.*)



1. ábra

Valamely *egyargumentumú predikátum terjedelmén* azon egyedi dolgok halmazát értjük, amelyekre a predikátum igaz. Egyes predikátumok esetén ez nem függ a tárgyalási univerzum választásától (például az olyan főnév alakú predikátumok esetén, amelyek természeti fajták közös neveként funkcionálnak: ember, ló, oroszlán, tölgyfa stb.), más esetben függhet tőle. Ezért, általánosságban, az egyargumentumú predikátum terjedelmének fogalmát relativizált, a tárgyalási univerzumtól függő értelemben használjuk. Ha ismerjük a tárgyalási univerzumot és az egyargumentumú predikátum terjedelmét, akkor ismerjük azt a függvényt is, amely e predikátum faktuális értéke. Ez fordítva is igaz. Ezért *bármely egyargumentumú predikátum faktuális értéke lényegében nem más, mint a tárgyalási univerzumhoz viszonyított terjedelme.*

'Terjedelem', latin eredetű szóval: *extenzió*. Ez némi magyarázatot ad az 'extenzionális funktor', 'extenzionális logika' kifejezéseinkben szereplő 'extenzionális' jelző használatára. Arra is rámutat hogy a *faktuális érték* fogalmát jogosan használjuk az extenzionális predikátumokkal kapcsolatban. Hiszen az, hogy például mi a 'diák' predikátum *terjedelme* – azaz, hogy kik a diákok –, az a predikátum intenziójának rögzítése után már csakis a tényektől, a világ mindenkori állapotától függ.

4.2. KÉTARGUMENTUMÚ PREDIKÁTUMOK

A primitív kétargumentumú predikátumoknak a magyar nyelvben leggyakoribb kifejezési formáit illusztrálják az alábbi egyszerű mondatok (a predikátumok aláhúzva):

(1) Rómeó **szereti** Júliát.
Péter **magasabb, mint** Pál.
Amália **anyja** Bellának.

Az első példában a predikátum tárgyas ige (a magyarban hozzászámít a tárgy '-t' jele is), a másodikban középfokú melléknév plusz a 'mint' szócska, a harmadikban (egyes szám 3. személyű) birtokos személyraggal ellátott főnév (plusz a részeshatározó '-nak/-nek' ragja). Mint az egyargumentumú predikátumok esetén, itt is előfordulhatnak bonyolultabb képződmények is (ezek közül gondosan ki kell válogatnunk az extenzionálisakat).

Ha az első argumentum toldalék nélküli (alanyesetben áll), a második argumentum gyakran tárgy (a magyar nyelvtan szerint), de nem mindig, mint az alábbi példák mutatják:

Péter Máriá**val táncol.**
Juli a park**ban sétál.**

Az argumentumok sorrendje lényeges: a két argumentum szerepének fölcserélésével a kimenet igazságértéke megváltozhat. (Illusztráljuk ezt az (1) alatti példákkal!) Persze, vannak esetek, amikor az argumentumok fölcserélése nem okoz változást a kimenet igazságértékében; például, ha *Péter testvére Pálnak,* akkor *Pál is testvére Péternek,* és viszont. Az általános esetben azonban az argumentumok sorrendjétől nem tekinthetünk el. Nevezzünk egy elempárt *kéttagú sorozat*nak, ha rögzítjük, hogy melyik számít elsőnek és melyik másodiknak; megengedve viszont, hogy az első és a második tag azonos is lehet. Hasonló értelemben használjuk a *háromtagú, négytagú* stb. sorozat fogalmát is, itt is megengedve, hogy a különböző sorszámú tagok között lehetnek azonosak is. A kéttagú sorozatokat *rendezett párok*nak is szokás nevezni, s hasonlóan a három-, négy- stb. tagú sorozatokat a *ren-*

dezett hármas, rendezett négyes stb. elnevezésekkel is illethetjük. Így az előbbi meghatározásban 'kéttagú sorozat' helyett mondhatunk 'rendezett pár'-t is.

Bármely *kétargumentumú predikátum faktuális értéke* olyan függvény, amely a tárgyalási univerzum elemeiből képezhető rendezett párok (kéttagú sorozatok) mindegyikéhez egy-egy igazságértéket rendel. Az ilyen függvényeket kétargumentumú (vagy kétváltozós) függvényeknek szokás nevezni; mindkét argumentumuk értéke a tárgyalási univerzum valamely eleme lehet.

Így például a 'szereti' faktuális értéke olyan függvény, amely akkor és csak akkor rendeli az 1 (igaz) értéket egy kéttagú sorozathoz, ha a sorozat első tagja szereti a második tagját. Ha a sorozat két tagja azonos, és a függvény mégis az 1 értéket rendeli hozzá, akkor itt olyan egyedről van szó, amely szereti önmagát.

Kétargumentumú predikátum terjedelmén azon kéttagú sorozatok halmazát értjük, amelyekre a predikátum igaz. Azon, hogy egy kétargumentumú predikátum *igaz egy kéttagú sorozatra,* a következőt értjük: ha a predikátum első és második argumentumhelyét rendre kitöltjük a sorozat első, illetve második tagját jelölő névvel, igaz mondatot kapunk. A terjedelmet itt is célszerű a tárgyalási univerzumhoz viszonyítva elgondolni. Mint az egyargumentumú esetben, a predikátum faktuális értékének megadása most is egyenértékű terjedelmének megadásával.

A kétargumentumú predikátumokban az argumentumok sorrendjét, egyéb kikötés híján, a balról jobbra haladás sorrendjének megfelelően rögzítjük. A magyar mondatokban a szórend meglehetősen kötetlen. Ha egy logikai elemzésben valamely kétargumentumú predikátum többször is előfordul (esetleg más-más argumentumokkal), megeshet, hogy az argumentumhelyek sorrendje fölcserélődik (például „alany-ige-tárgy" a szórend az egyik helyen, de „tárgy-ige-alany" a másik helyen; mondjuk 'Mária látja Jánost' és 'Pétert látja Juli'). Ezért különös figyelemmel kell eljárnunk a bemeneti helyek sorrendjének helyes megállapításakor. Hogy ezt milyen technikai segédeszközökkel biztosíthatjuk, arról a megfelelő helyen szólunk.

4.3. KETTŐNÉL TÖBB ARGUMENTUMÚ PREDIKÁTUMOK

A primitív predikátumok között ilyen viszonylag kevés akad, de azért néhány példát tudunk mutatni:

A titkár **átadta** a jelentést az igazgatónak.
Péter a park**ban észrevette** Julit.
A városháza **és** a gimnázium **között terül el** a szabadtéri múzeum.
Amália **elküldi** Bellát Ceglédre Dani**ért.**

Sok nevet tartalmazó hosszú mondatból a nevek kihagyásával esetleg még több argumentumú predikátumot nyerhetünk.

Egy *n-argumentumú predikátum faktuális értéke* – ahol *n* az 1, 2, 3, 4,... természetes számok valamelyikét jelöli – olyan függvény, amely a tárgyalási univerzum elemeiből képezhető *n*-tagú sorozatok mindegyikéhez egy-egy igazságértéket rendel. Azon *n*-tagú sorozatok halmazát, amelyekhez e függvény az 1 (igaz) értéket rendeli, a predikátum *terjedelmének* mondjuk. (Az $n = 1$ esetben *egytagú* sorozatokról van szó; a tárgyalási univerzum elemeit tekintsük egytagú sorozatoknak.)

Ez a meghatározás magában foglalja az egy- és a kétargumentumú predikátumokra korábban megfogalmazott analóg definíciókat is. Elvileg újat itt már nem mondunk, így további magyarázatokra nincs szükség.

4.4. A KLASSZIKUS ELSŐRENDŰ LOGIKA

Most már hozzáláthatunk az extenzionális logika azon fejezetének körülhatárolásához, amely könyvünk törzsanyagát képezi. Ennek jellemzői a következők:

(1) Mondatok elemzésekor csak mondatokat, neveket, (extenzionális) predikátumokat és extenzionális mondatfunktorokat veszünk figyelembe.

(2) A neveket felbontatlan egységeknek tekintjük, így például a leírások belső szerkezetét nem elemezzük.

(3) A kifejezések *értékelésekor* az időadatokat nem vesszük figyelembe. Ha egy kifejezés faktuális értéke időben változó lehet, úgy tekintjük, mintha az időpont rögzítve lenne. (Ha többször előfordul, kikötjük, hogy mindegyik előfordulásához egyazon időadat tartozik.) Ennek következtében, ha egy igét tartalmazó predikátumban az ige egyszer jelen, máskor múlt idejű, azt két különböző predikátumként kell interpretálnunk.

Egy további jellemzőt csak később, a 6. fejezetben ismertethetünk.

A fenti korlátozásokkal körvonalazott logikai elméletet *klasszikus elsőrendű* logikának nevezzük. Itt a 'klasszikus' jelző arra utal, hogy ez a modern logika – a *szimbolikus logika* – elsőként kidolgozott, ám eléggé átfogó elmélete. Az 'elsőrendű' jelző értelmét csak később magyarázhatjuk meg.

Az időadatok figyelmen kívül hagyása – a (3) korlátozás – nem jelent komoly megszorítást. Ha például a 'költő' predikátum az egyik előfordulásakor 19. századbeli, másik előfordulásakor pedig 20. századbeli költőt akar jelenteni, akkor fogjuk fel úgy, hogy két predikátummal van dolgunk, s jelöljük az egyiket mondjuk a 'költő_{19}' a másikat a 'költő_{20}' kifejezéssel.

Az (1) és a (2) korlátozás némileg szűkíti az alkalmazások körét, de a következtetések során nem okoz elháríthatatlan zavarokat. Legföljebb arra kényszerít, hogy több premisszát kell használnunk, mint akkor, ha névfunktorokat és leírásokat is szerepeltethetnénk a logikai szerkezet feltárása során. Tananyagunk keretei között ezzel a problémával nem foglalkozhatunk részletesebben.

A klasszikus elsőrendű logika jellegzetességei közé tartozik még természete-

sen az is, hogy *extenzionális logika.* Mint tudjuk, ez azt jelenti, hogy a szóba jöhető kifejezések interpretálásakor *csak faktuális értéküket* kell megadni. Ezt azonban mindig meg *kell* adni: ha interpretálunk, a faktuális érték hiánya tilos. Nem lehet név jelölet nélkül, predikátum terjedelem nélkül, mondat igazságérték nélkül. Ezt úgy mondhatjuk, hogy a klasszikus elsőrendű logikában nincs helye a *szemantikai értékrés*nek.

Szemantikai értékrés akkor keletkezik, ha egy névnek nincs jelölete, vagy egy mondatnak nincs igazságértéke (ezekre láttunk példákat a 2.2 szakaszban), vagy ha egy extenzionális funktornak nincs faktuális értéke. Általánosan: *szemantikai értékrésen a faktuális érték hiányát értjük,* olyan kifejezés esetén, amelynek elvileg lehetne faktuális értéke. (E kifejezések a mondatok, a nevek és az extenzionális funktorok.)

Az állításokat kifejező mondatok logikai szerkezetének feltárásában nincsenek abszolút követelmények: a kitűzött feladattól függően a mondatokat kisebb vagy nagyobb mélységig bonthatjuk föl, nem kell feltétlenül a végső extenzionális alkatrészekig elmennünk. Interpretálnunk pedig csak a feltárt, tovább már nem elemzett alkatrészeket kell; az ezekből összerakható bonyolultabb kifejezések faktuális értékei a „kiszámítási szabályok" révén már egyértelműen meghatározhatók.

Ellenőrző kérdések

4.1. Milyen funktorokat mondunk extenzionális predikátumoknak?

4.2. Mit értünk tárgyalási univerzumon?

4.3. Hogyan definiáljuk az egyargumentumú predikátumok faktuális értékét?

4.4. Milyen kapcsolat van az egyargumentumú predikátumok faktuális értéke és terjedelme között?

4.5. Fontos-e a többargumentumú predikátumok esetén az argumentumok sorrendje? Miért?

4.6. Mit értünk rendezett páron (kéttagú sorozaton)? Mit értünk rendezett hármason, négyesen stb.?

4.7. Hogyan értelmezzük a többargumentumú predikátumok faktuális értékét és terjedelmét? Mi a kapcsolat e kettő között?

4.8. Jellemezze a klasszikus elsőrendű logikát! Mik a korlátai?

Gyakorló feladatok

4.1. Keressük ki a predikátumokat az alábbi mondatokból! Osztályozzuk őket argumentumszámuk szerint! [2: 7,9,11; 4.1.]

a) Dezső és Oszkár barátok.

b) Az ég kék.

c) A nyolc nem törzsszám.

d) Senki sem okosabb mindenkinél.

e) Amelyik kutya ugat, az nem harap.

f) Móricz Zsigmond ismertebb, mint Tersánszky Józsi Jenő.

g) Ez nem más, mint az utolsó példamondat.

4.2. Tekintsük tárgyalási univerzumnak a számegyenes pontjainak halmazát, s ábrázoljuk az igazságértékeket (0 és 1) az ordinátatengelyen. Ábrázoljuk ebben a koordináta-rendszerben az alábbi aritmetikai predikátumok faktuális értékét mint függvényt! Leolvasható-e a grafikonokról az egyes predikátumok terjedelme? [4: 2,3,4.]

a) természetes szám; *b)* ötnél nagyobb szám; *c)* törzsszám; *d)* –4-nél kisebb egész szám; *e)* hárommal osztható egész szám; *f)* öt és kilenc közé eső szám; *g)* olyan szám, amely gyöke az $5x^2+3x-8 = 0$ egyenletnek.

4.3. Az alábbi kétargumentumú predikátumok közül válasszuk ki azokat, amelyek argumentumaik sorrendjének fölcserélésével

a) mindig más igazságértékű állítást adnak,

b) adhatnak más igazságértékű állítást,

c) sohasem adnak más igazságértékű állítást. [4.5.]

... testvére ...-nak; ... alacsonyabb, mint ...; ... szereti ...-t;

... párhuzamos ...-val; ... merőleges ...-ra;

... megszökteti ...-t; ... házastársa ...-nak; ... anyja ...-nak;

... évfolyamtársa ...-nak.

4.4. Mondjunk olyan kétargumentumú predikátumokat, amelyeknek a terjedelmébe csak olyan rendezett párok tartoznak, amelyeknek első és második tagja azonos, és mondjunk olyanokat is, amelyek terjedelmébe ilyen párok is tartoznak, de nem csak ilyenek! [4: 6,7.]

5. IGAZSÁGFUNKTOROK

Az extenzionális mondatfunktorokat *igazságfunktorok*nak mondjuk. Az elnevezés arra utal, hogy egy ilyen funktor kimenetének igazságértéke csak bemeneteinek igazságértékétől függ. E fejezetben az igazságfunktorokkal foglalkozunk. Az igazságfunktorok faktuális értékeit *igazságfüggvények*nek nevezhetjük.

5.1. LOGIKAI FUNKTOROK

Néhány funktor kiemelkedő szerepet játszik a kommunikációban, teljesen függetlenül a kommunikáció témájától, a mondatok hordozta információ tartalmától. Fő funkciójuk az információ *tagolása,* szerkezetének kialakítása. Ezeket *logikai funktorok*nak fogjuk mondani. Pontosabb meghatározást nem adhatunk rájuk, nem is sorolhatjuk föl előre őket. Nyitva tartjuk annak lehetőségét, hogy a logika tudományának fejlődésével újabb logikai funktorokat vezethessenek be. Kimerítően felsorolhatjuk azonban a *klasszikus elsőrendű logikában* szereplő logikai funktorokat (ezt később meg is tesszük). Ezek többsége *igazságfunktor,* s ez az oka annak, hogy éppen itt szólunk róluk.

A logikai funktorokat kifejező természetes nyelvi szavakat logikai szavaknak mondhatjuk. Néhány példa ezekre:

nem, és, vagy, ha ... akkor.

Ezek a kötő-, illetve módosítószavak valóban rendszeresen föllépnek a kommunikáció során, éspedig a tartalomtól, a témától függetlenül, s ezért méltán tekinthetjük őket *logikai* szavaknak. A magyar nyelvben azonban a szerepük többrétegű, és ennyiben többértelműek. Válasszuk ki azt a jelentésüket, amelyben mondatfunktorokként, még pontosabban: *igazságfunktorokként* szerepelnek. (Alább látni fogjuk, hogy *van* ilyen jelentésük.) Annak érdekében, hogy e jelentésüket elkülönítsük más értelmüktől, önálló szimbólumokat vezetünk be jelölésükre. E szimbólumokat *logikai jelek*nek fogjuk mondani (pontosabb elnevezés: *logikai konstansok*). A logikai jelek éppúgy internacionálisak, mint a matematikai vagy a kémiai szimbólumok. Jelentésüket, intenziójukat egyszer s mindenkorra rögzít-

jük, így *nem kell őket interpretálnunk.* (Ehelyett azt is mondhatjuk, hogy csak az előírt módon szabad interpretálnunk őket.)

A logikai jeleket általánosan jellemzi az, hogy rögzített intenziójuk van, azaz hogy nem szabad őket (másként) interpretálni.

Az állítások logikai szerkezetének föltárásához hozzátartozik a bennük szereplő logikai szavak fölismerése és logikai szimbólumokkal való helyettesítése is. Majd látni fogjuk, hogy a helyes következtetés értelmezésében alapvető szerepük van a logikai szavaknak.

5.2. NEGÁCIÓ

Tekintsük a következő mondatot:

(1) Nem igaz, hogy Péter magasabb, mint Pál.

A 'nem igaz, hogy' kifejezésről már a 3.3. szakaszban megállapítottuk, hogy extenzionális mondatfunktor, és hogy igaz bemenet esetén hamis kimenetet ad, hamis bemenet esetén pedig igazat.

E funktort logikai funktorrá óhajtjuk minősíteni. Jelölésére a '~' szimbólumot vezetjük be; tehát (1)-et így írhatjuk:

~ (Péter magasabb, mint Pál).

Általánosan: ha *p* tetszőleges mondatot jelöl, akkor a "~ (*p*)" kifejezést a *p* mondat *negációjának*, a '~' szimbólumot *negációjelnek* mondjuk. (Az argumentumot csak akkor fogjuk közre zárójelekkel, ha ez az egyértelműség érdekében szükséges; tehát néha csak "~*p*"-vel jelöljük *p* negációját. (A '~' jelet 'non'-nak is ejthetjük, ez a latin *nem*.)

Általános meghatározások és törvények szabatos megfogalmazásában jó szolgálatot tehet a *betűszimbólumok* (mint imént a '*p*') használata. Ezeket úgy tekintjük, hogy tetszőleges, de meghatározott kategóriába tartozó kifejezéseket képviselnek. (Az iménti '*p*' tetszőleges *mondatot* képviselhet.) Az ilyen célra használt betűjeleket *paramétereknek* fogjuk mondani. Állapodjunk meg abban, hogy a *p, q, r* betűket – szükség esetén számindexekkel ellátva – mondatparaméterekként használjuk, azaz tetszőleges mondatok képviselőinek tekintjük őket.

A negációjel természetesen egyargumentumú igazságfunktor. Faktuális értéke az a függvény, amelyet a következő táblázattal adhatunk meg:

bemenet:	1	0
kimenet:	0	1

(Emlékezzünk arra, hogy 1 az igazság, 0 a hamisság szimbóluma.)

A természetes nyelvben a negáció kifejezésére a 'nem igaz, hogy' előtét alkalmazása mellett más lehetőségek is vannak. Leggyakoribb a 'nem' beiktatása az állítmány elé:

(1′) Péter *nem* magasabb, mint Pál.

Előfordul azonban, hogy a tagadószó több helyre is beiktatható egy mondatban, de nem mindegyik beiktatása fejez ki negációt:

Némelyik emlős tud repülni.
Némelyik emlős *nem* tud repülni

Mivel mindkét állítás igaz, a második nem lehet az elsőnek a negációja, hiszen a negáció alkalmazásával igaz állításból hamisat, hamis állításból igazat kell kapnunk. Hasonló félreértésre adhat alkalmat a következő állítás:

(2) Minden prókátor hazudik.

Ha valaki (2)-t nem tartja igaznak (mondjuk azért, mert maga is prókátor), akkor hajlamos (2) helyett annak negációja mellett erősködni. Ez nem is lenne baj, kivéve ha úgy véli, hogy (2) negációja a következő mondat:

(3) Egyetlen prókátor sem hazudik,

vagy esetleg átfogalmazva:

(4) Minden prókátor igazat mond.

Sem (3), sem, (4) nem negációja (2)-nek, hiszen elképzelhető, hogy mindhárom mondat hamis. Ez a helyzet már akkor is, ha van legalább egy prókátor, aki igazat mond; és legalább egy, aki hazudik. A (2) mondat negációját fejezik ki a következő állítások:

(5) Nem minden prókátor hazudik.

(6) Nem igaz, hogy minden prókátor hazudik.

Csak a 'nem igaz, hogy' előtét az, amely bármely mondatra alkalmazva annak negációját fejezi ki. A '~' jel ennek logikai szinonimája.

További problémát jelent, ha összetett mondatra alkalmazunk negációt:

(7) Nem igaz, hogy Péter magasabb, mint Pál, és Pál magasabb, mint Piroska.

Itt az nem világos, hogy a negáció csak az első tagmondatra vagy az összetett mondat egészére vonatkozik-e. Az ilyen típusú kétértelműségek elkerülésére szolgál az argumentum zárójelekkel való közrefogása:

(7.1) ~ (Péter magasabb, mint Pál), és Pál magasabb, mint Piroska.
(7.2) ~ (Péter magasabb, mint Pál, és Pál magasabb, mint Piroska).

A negációt egyargumentumú mondatfunktorként értelmezve a következőket mondhatjuk:

Egy tetszőleges p mondat negációján a "nem igaz, hogy p" mondatot (vagy annak stiláris változatát) értjük, amelyet a következő igazságszabály jellemez:

$\sim p$ akkor, és csak akkor igaz, ha p hamis.

Kettős negáció. A negáció olyan funktor, melynek bemenete és kimenete azonos kategóriába tartozik. Ennélfogva egy mondat negációjára ismételten alkalmazható a negáció. Imént láttuk, hogy (1′) éppen a 'Péter magasabb, mint Pál' mondat negációja. Alkalmazzuk a 'nem igaz, hogy' kifejezést (1′)-re:

(8) Nem igaz, hogy Péter nem magasabb, mint Pál.

A negációjel alkalmazásával:

(8′) ~~ (Péter magasabb, mint Pál).

Ha az egyszeres negáció igaz állításból hamisat, hamisból pedig igazat képez, akkor a kétszeres negáció „helyreállítja az eredeti állapotot". Ugyanis igaz állítást negálva hamis, újfent negálva pedig ismét igaz állítást kapunk. Hasonlóképpen, ha a kiinduló állítás hamis, akkor a negáció alkalmazása után kapott állítás igaz, az újbóli alkalmazása után kapott állítás pedig hamis lesz. Így a kétszeres negáció faktuális értéke az a függvény, amely minden igazságértékhez önmagát rendeli, azaz olyan függvény, amely úgy működik, hogy nem csinál semmit.

Ezek szerint tetszőleges p állítás esetén "$\sim\sim p$" és p igazságértéke mindig azonos. Ezt a tényt úgy fejezzük ki, hogy "$\sim\sim p$" *logikailag ekvivalens* p-vel, és így jelöljük:

(T1) $\sim\sim p \Leftrightarrow p$.

A '$\Leftrightarrow$' szimbólum a *logikai ekvivalencia* jele. (Ekvivalens annyi mint *egyenértékű.*) A (T1) alatti összefüggést a *kettős negáció törvényének* nevezzük.

5.3 LOGIKAI EKVIVALENCIA

Mielőtt tovább haladnánk az igazságfunktorok felfedezésében, fordítsuk figyelmünket az imént (T1) alatt bevezetett logikai ekvivalencia jelére, e jel használati módjára. Ez azért is szükséges, mert ezt a jelet a továbbiakban rendszeresen fogjuk használni.

(a) A logikai ekvivalencia jelének (⇔) két oldalán csaknem mindig olyan kifejezések szerepelnek, amelyekben nem találunk természetes nyelvi szavakat, hanem csak logikai szimbólumokat és paramétereket. Az ilyen kifejezéseket *formulák*nak vagy *sémák*nak nevezhetjük. (Ebben a fejezetben kizárólag *mondat*paramétereket használunk, később a nevek és a predikátumok reprezentálására is bevezetünk paramétereket.) Ha ezeket a paramétereket behelyettesítjük megfelelő típusú magyar kifejezésekkel (például a mondatparamétereket mondatokkal), és a logikai jeleket is kiolvassuk, a '⇔' jel mindkét oldalán egy-egy mondatot kell találnunk. (Ellenőrizzük mindezt (T1)-en!)

(b) Egy logikai ekvivalencia mindig azt állítja, hogy a benne szereplő paraméterek *bármely* szabatos behelyettesítésével a '⇔' jel két oldalán *azonos intenziójú* – és ennélfogva azonos igazságértékű – mondatokat kapunk. A paraméterek *szabatos* behelyettesítésén azt értjük, hogy behelyettesítéskor betartjuk a logikai grammatika kategorizálását: így a mondatparamétereket mondatokkal (és hogy a későbbieket is jelezzük: a predikátumparamétereket predikátumokkal, a névparamétereket nevekkel) helyettesítjük be; továbbá még azt is, hogy ha egy paraméter többször is előfordul (az '⇔' jel bármelyik oldalán), akkor minden előfordulását egyazon kifejezéssel helyettesítjük. (A különböző paramétereket viszont szabad akár különböző, akár azonos kifejezésekkel helyettesíteni.) Így, ha azt állítjuk, hogy $A \Leftrightarrow B$, azaz hogy A és B logikailag ekvivalensek, akkor azt állítjuk, hogy A-ból és B-ből *azonos intenziójú* mondatokat kapunk paramétereik bármely szabatos behelyettesítése révén.

(c) A logikai ekvivalenciák szemléltetésére néha olyan példákat mutatunk, amelyekben a paramétereket ténylegesen behelyettesítettük. Az ilyen példákban a '⇔' jel két oldalán valódi mondatok szerepelnek. Például (T1)-et így szemléltethetjük:

(c1) ~ ~ (Péter dolgozik) ⇔ Péter dolgozik.

E jelölést a következő megállapodással szentesítjük: *Ha $A \Leftrightarrow B$, akkor az A és a B szabatos behelyettesítésével nyert mondatokat is logikailag ekvivalenseknek mondjuk.* Ügyelnünk kell azonban az ilyen ekvivalenciák kiolvasására. Amíg A és B sémák, addig az "$A \Leftrightarrow B$" állítást így olvashatjuk: "A logikailag ekvivalens B-vel"; tehát (T1)-et így: "non non p logikailag ekvivalens p-vel". De groteszk lenne (c1)-et így kiolvasni:

(c2) non non Péter dolgozik logikailag ekvivalens Péter dolgozikkal.

A helyes kiolvasás az, hogy a '⇔' két oldalán szereplő állításokat *megnevezzük*, pl. az 'az, hogy' előtét alkalmazásával:

(c3) Az, hogy non non Péter dolgozik, logikailag ekvivalens azzal, hogy Péter dolgozik.

Vagy, ha a negációjelet is magyar logikai szóval akarjuk kifejezni, a következő fordulatot alkalmazhatjuk:

(c4) Az, hogy nem igaz, hogy Péter nem dolgozik, logikailag ekvivalens azzal, hogy Péter dolgozik.

(d) A logikai ekvivalenciákat döntően a bennük szereplő logikai funktorok (logikai jelek) jelentésére alapozzuk (emellett természetesen szerepet játszik az is, hogy a jelek hol helyezkednek el a sémákban). Így (T1) a negációjel jelentése folytán igaz; a negációjel jelentését pedig a rá vonatkozó igazságszabály rögzíti, amely szerint igaz állítás negációja hamis, hamisé pedig igaz. Hasonló módon alapozzuk meg a további logikai ekvivalenciákat is.

(e) A logikai ekvivalenciák a *logikai törvények* speciális fajtáját alkotják. Más típusú logikai törvényekkel is találkozunk majd, így a következményreláció törvényeivel. A fontosabb logikai törvényeket e könyvben a (T1), (T2), ... számozásokkal jelöljük. Első példánk logikai törvényre a kettős negáció törvénye, amelyet a (T1) kóddal jelöltünk.

(f) A logikai ekvivalencia '⇔' jele *nem mondatfunktor.* Nem arra szolgál, hogy segítségével két mondatból összetett mondatot alkossunk (mint például az 'és' kötőszó, amellyel a következő szakaszban foglalkozunk). Valójában ez a jel különleges kétargumentumú predikátum, amelynek argumentumai formulák, esetleg mondatok *megnevezései* lehetnek. Világosan mutatja ezt (c3) és (c4), ahol az 'az, hogy' előtét alkalmazásával neveztük meg a mondatokat (pontosabban: a mondatokkal kifejezett állításokat). Amikor mondatok helyett formulákat szerepeltetünk a '⇔' két oldalán (ez az alapvető esete e jel használatának), akkor sem a két formulából képezünk egy összetettebb formulát, hanem a két formula összes szabatos behelyettesítéséről állítunk valamit (tudniillik azt, hogy mindig azonos intenziójú mondatpárokat eredményeznek). A logikai ekvivalencia jele tehát bizonyos logikai törvények kifejezésére szolgáló jel. Mivel *logikai jeleknek* azokat a szimbólumokat óhajtjuk nevezni, amelyek a természetes nyelv *logikai szavait* helyettesítik, a logikai ekvivalencia jelét nem sorolhatjuk a logikai jelek (logikai konstansok) közé, hiszen nincs olyan természetes nyelvi kötő- vagy módosítószó, amelynek pontosítására szolgálna. (Bár a jelentését el tudtuk mondani szavakkal.) Amit ez a jel kifejez, az egyedül a logika tudományában játszik szerepet, az általános információközlésben nincs funkciója. Ezért, ha kategorizálni akarjuk, *metalogikai jel*nek (kétargumentumú metalogikai predikátumnak)

mondhatjuk. Itt a 'metalogikai' jelző éppen arra akar utalni, hogy kizárólag a logika tudományában alkalmazzuk, logikai törvények kifejezésére

(g) Egy összetett kifejezés intenzióját egyértelműen meghatározza *logikai alkatrészeinek* intenziója. (Lásd 3.3.) Ezért: ha valamely alkatrészét fölcseréljük egy azonos intenziójú alkatrésszel, az összetett kifejezés intenziója változatlan marad. Tudjuk, hogy a logikailag ekvivalens kifejezésekből a paraméterek minden behelyettesítésével azonos intenziójú mondatpárok keletkeznek. Ennélfogva: ha $A \Leftrightarrow B$ és A logikai alkatrésze C-nek, akkor C-ben A valamely előfordulását B-vel pótolva a kapott C' kifejezés logikailag ekvivalens lesz C-vel: $C \Leftrightarrow C'$. Ennek legegyszerűbb esete:

Ha $A \Leftrightarrow B$, akkor $\sim A \Leftrightarrow \sim B$.

Szavakban: logikailag ekvivalens kifejezések negációi is logikailag ekvivalensek.

(h) A logikai ekvivalencia (b) alatti értelmezésében az ekvivalencia két oldalát egyenrangúnak kezeltük; azaz:

Ha $A \Leftrightarrow B$, akkor $B \Leftrightarrow A$,

vagyis a logikai ekvivalencia *szimmetrikus* reláció. Az is nyilvánvaló, hogy

ha $A \Leftrightarrow B$, és $B \Leftrightarrow C$, akkor $A \Leftrightarrow C$.

Ezt az összefüggést úgy fogalmazzuk, hogy a logikai ekvivalencia *tranzitív* reláció. A további tanulmányainkban a logikai ekvivalencia ezen tulajdonságait rendszeresen föl fogjuk használni. Most visszatérünk az igazságfunktorok tanulmányozásához.

5.4. KONJUNKCIÓ

Két mondat együttes információtartalmát legegyszerűbben a két mondatnak az 'és' kötőszóval való összekapcsolásával fejezhetjük ki; például:

(9) Péter magasabb, mint Pál, és Pál magasabb, mint Piroska.

Az 'és' itt kétargumentumú mondatfunktorként szerepel, a szokásos értelmezés szerint (9) akkor és csak akkor igaz, ha mindkét tagmondata igaz. Az 'és' kötőszó eme szerepének kifejezésére bevezetjük az '&' szimbólumot mint *logikai jelet.* E jel tehát egy igazságfunktort szimbolizál, melyet *konjunkció*nak nevezünk. Ha p és q tetszőleges mondatok, konjunkciójukon a "p & q" mondatot értjük. (Az '&' jelet ejthetjük 'et'-nek – az 'és' latin megfelelője – vagy akár 'és'-nek is.)

A kétargumentumú igazságfunktorok faktuális értékét négyzet alakú táblázattal adhatjuk meg, a bal szélen az első bemenet, a felső szélen pedig a második bemenet értékeit tüntetve föl. Megválasztva a két bemenet értékét, a megfelelő sor és oszlop kereszteződésében találjuk a kimenet értékét. A konjunkciónak megfelelő igazságfüggvény a következő.

&	1	0
1	1	0
0	0	0

A természetes nyelvben a konjunkció kifejezésére az 'és'-en kívül más lehetőségek is kínálkoznak:

(10) Péter is elment, Juli is elment.

Ebben az állításban két másik állítás fordul elő alkatrészként: 'Péter elment' és 'Juli elment', kötőelemük az 'is ... is' kötőszópár. Ha megvizsgáljuk, hogy a kimenet igazságértéke hogyan függ a bemenetek igazságértékétől, látjuk, hogy ez pontosan úgy alakul, mint a konjunkció esetén. Ebből látjuk, hogy az 'is ... is' a konjunkció egyik kifejezési formája.

Bonyolultabb az eset, ha az 'is ... is'-t eltávolítva a mondatból, nem marad vissza két önálló mondat:

(11) Péter is, Juli is elment.

Látjuk azonban, hogy (11) ugyanazt az információt hordozza, mint (10), azaz hogy (11) nem más, mint (10) rövidebb kifejezési formája.

Bár Péter elment, Juli itt maradt.
Esik az eső, noha süt a Nap.
Péter harmadik díjat nyert, mindazonáltal nem lett jókedvű.
Habár Juli szomorkodik, a többiek vidámak.
Klári elment a randevúra, de a barátja nem jött el.
Péter válogatott sportoló, aki egyben kitűnő tanuló is.

Mint az 'is ... is' esetén, most is látható, hogy az e példákban szereplő kötőszavak (bár, noha, mindazonáltal, habár, de stb.) is konjunkciót fejeznek ki, sőt néha még az 'aki', 'ami' vonatkozó névmás is. Még kötőszó nélkül is kifejezhetjük a konjunkciót (írásban vesszővel való elválasztással).

Általánosan, egy kötőszó vagy kötőszópár akkor és csak akkor tekinthető a konjunkció kifejezőjének, ha:

(i) kétargumentumú extenzionális mondatfunktor, és

(ii) faktuális értéke azonos a konjunkció faktuális értékével.

Azt, hogy egy kötőszó egy mondaton belül konjunkciót fejez-e ki, esetenként kell megvizsgálni. Ugyanis előfordul, hogy egy kötőszó néha az '&' kifejezője, máskor pedig nem. Még az 'és' kötőszó sem kivétel nélkül konjunkciót fejez ki:

(12) Micimackó és Malacka barátok. Juli és Mari szomszédok.

(13) Micimackó és Malacka menyétre vadásznak. Juli és Mari énekel.

Fogalmazzuk át (13)-at így:

(13′) Micimackó menyétre vadászik, és Malacka menyétre vadászik. Juli énekel, és Mari énekel.

Ebből világos, hogy (13)-ban az 'és' konjunkciót fejez ki. Viszont (12)-ben nem ez a helyzet, a hasonló átfogalmazás teljesen félrevezető lenne:

(12′) Micimackó barát, és Malacka barát. Juli szomszéd, Mari szomszéd.

Mert ha *baráton,* szomszédon olyan valakit értünk, aki barátja, szomszédja valakinek (ahogyan *apá*nak azt mondjuk, aki *apja* valakinek), akkor (12′) egyáltalán nem azt jelenti, hogy Micimackó és Malacka, Juli és Mari *egymás* barátai, szomszédai, noha (12) feltehetően ezt akarja mondani. Ez utóbbi tartalmát így fejezhetjük ki:

(12″) Micimackó *barátja* Malackának. Juli *szomszédja* Marinak.

Ha elfogadjuk, hogy a kétargumentumú 'barátja, szomszédja' predikátum *szimmetrikus,* azaz argumentumainak fölcserélése nem változtatja meg a kimenet igazságértékét, akkor (12″) és (12) információtartalma azonos. (Biztosan szimmetrikus pl. a 'testvére' predikátum, ezért 'Jancsi és Juliska testvérek' ugyanazt mondja, mint 'Jancsi testvére Juliskának'.) Ezzel az átfogalmazással azonban az 'és' kötőszó eltűnt, s ez világossá teszi, hogy (12)-ben nincs konjunkció. Ha netán úgy véljük, hogy a *barátja, szomszédja* predikátum nem szimmetrikus, akkor (12) feltételezett információtartalmát így részletezhetjük:

(Micimackó barátja Malackának) & (Malacka barátja Micimackónak).
(Juli szomszédja Marinak) & (Mari szomszédja Julinak)

Pedagógiai szempontból a konjunkció kötőszavának helyes megválasztása fontos lehet. Például:

Pozitív és negatív számmal lehet osztani, *de* a 0-val nem lehet.

Ha itt a 'de' helyére 'és'-t teszünk, a mondat információtartalma változatlan marad, de eltűnik az a pszichikai hatása, amely a nulla kivételezett helyzetét hangsúlyozza az osztás tekintetében. Didaktikai szempontból a szavak megválasztásának és hangsúlyozásának igen nagy a szerepe. De ez a téma már nem a logika körébe tartozik.

A konjunkció logikai törvényei. A konjunkció igazságfeltétele alapján világos, hogy benne a tagok (az argumentumok) sorrendje fölcserélhető, azaz érvényes a következő logikai ekvivalencia:

(T2) $p \,\&\, q \Leftrightarrow q \,\&\, p$.

Ezt úgy mondhatjuk, hogy a konjunkció *kommutatív.*

Ha a "$p \,\&\, q$" konjunkcióhoz konjunkcióval kapcsoljuk az r mondatot – azaz ha egy "$(p \,\&\, q) \,\&\, r$" szerkezetű állítást alkotunk –, ennek igazságfeltétele ugyanaz lesz, mint a p-ből és "$q \,\&\, r$"-ből alkotott konjunkciónak, azaz "$p \,\&\, (q \,\&\, r)$"-nek; tehát:

(T3) $(p \,\&\, q) \,\&\, r \Leftrightarrow p \,\&\, (q \,\&\, r)$.

Ugyanis mindkét oldal akkor és csak akkor igaz, ha a p, q, r tagmondatok mindegyike igaz. (Részletezzük ennek bizonyítását lépésről lépésre a konjunkció igazságfeltétele alapján!) Ennélfogva a műveletek sorrendjét kijelölő zárójelek használata fölösleges; (T3) mindkét oldalát egyszerűen így írhatjuk:

$p \,\&\, q \,\&\, r$

A (T3) törvény tartalmát így is kifejezhetjük: a konjunkció *asszociatív.* A kommutativitás és az asszociativitás tulajdonsága tekintetében a konjunkció hasonlít az összeadásra és a szorzásra, amelyek ugyancsak kommutatív és asszociatív – ám aritmetikai – műveletek.

Ha a konjunkció két tagja azonos, akkor fennáll a

(T3a) $p \,\&\, p \Leftrightarrow p$

ekvivalencia. Úgy tűnik ilyenkor a konjunkció fölösleges. De a logikai elemzés során előfordulhat, és e törvény szerint kiküszöbölhető.

A (T2), (T3) törvények alapján bevezethetjük az akárhány tagú konjunkció fogalmát:

$p_1 \,\&\, p_2 \,\&\, \ldots \,\&\, p_n \; (n \geq 2)$,

azzal az igazságfeltétellel, hogy egy ilyen *n-tagú konjunkció* akkor és csak akkor igaz, ha minden tagja igaz. A kettőnél több tagú konjunkciót zárójelek beiktatásával mindig kifejezhetjük kéttagú konjunkciók segítségével, és persze többféle módon is, miközben még a tagok sorrendjét is szabadon variálhatjuk.

Ha egy konjunkció igaz, akkor bármelyik tagja igaz. Ezt úgy is kifejezhetjük,

hogy egy *konjunkcióból helyesen következtethetünk annak bármelyik tagjára.* E tényt a következő sémával fejezhetjük ki.

(T4) $(p_1 \& p_2 \& \ldots \& p_n) \Rightarrow p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n, n \geq 2)$.

Az ilyen sémákat *következtetési sémák*nak fogjuk mondani. A sémában a '$\Rightarrow$' a *következményreláció* jele, tőle balra szerepel a következtetés *premisszája* (esetleg több premissza is), jobbra pedig a következtetés *konklúziója.* (T4)-re teljesül: lehetetlen olyan szituáció, amelyben a premissza igaz, a konklúzió pedig hamis; és ez csupán a sémában kijelölt logikai szerkezeten, döntően az '&' jel jelentésén múlik. Az, hogy a $p_1, p_2, \ldots, p_n$ állítások miről szólnak, e szempontból egyáltalán nem játszik szerepet. (A '$\Rightarrow$' is metalogikai jel, mint a logikai ekvivalencia '$\Leftrightarrow$' jele.)

A (T4) séma „magától értetődő" (triviális), és valaki úgy vélhetné: ezért ugyan fölösleges logikát tanulni. Nos, találkozunk majd kevésbé „magától értetődő" következtetési sémákkal is, de a bonyolult esetek indokolása is mindig ilyen triviális lépések sorozatára bonthatónak bizonyul. A logika egy olyan bonyolult készülékhez hasonlítható, amely rendkívül egyszerű alkatrészekből van összerakva. De azért jegyezzük meg, hogy az olyan egyszerű törvényeket is, mint (T4), a logikában *megindokoljuk* (esetünkben az '&' jelentéséből vezettük le). Valaki mondhatja: amit (T4) mond, azt eddig is tudtam. De nem biztos, hogy azt is meg tudná magyarázni, hogy *honnan tudta.*

Észrevehetjük, hogy *a logikai ekvivalenciák a kölcsönös következményreláció kifejezői:* bal oldalukból következtethetünk a jobb oldalukra, és fordított irányban is. (A '$\Leftrightarrow$' jelet úgy foghatjuk fel, mint '$\Leftarrow$' és '$\Rightarrow$' összeolvasztását.) Ellenőrizzük ezt a (T1), (T2), (T3) törvények esetében!

5.5. ALTERNÁCIÓ

Tekintsük most két negált állítás konjunkcióját, például a következőt:

(13) Nem esik az eső, és nem fúj a szél.

Ennek szerkezete tehát "$\sim p \& \sim q$" alakú, ahol p szerepében 'esik az eső', q szerepében pedig 'fúj a szél' található. Mint konjunkció, ez akkor és csak akkor igaz, ha "$\sim p$" is, "$\sim q$" is igaz; ez viszont akkor és csak akkor teljesül, ha a p, q tagmondatok mindegyike hamis. Vegyük most (13) negációját:

(13.1) *Nem igaz, hogy* (*nem* esik az eső, *és nem* fúj a szél).

Amikor (13) igaz, akkor (13.1) hamis. Az iméntiek szerint ez pedig akkor és csak akkor következik be, ha mindkét negálatlan tagmondat hamis. Ezek szerint

(13.1) akkor és csak akkor *igaz,* ha a benne szereplő 'esik az eső', 'fúj a szél' tagmondatok közül legalább az egyik igaz. A (13.1.) mondat logikai szerkezetét a következő séma ábrázolja:

(14) $\sim (\sim p \ \& \sim q)$.

Egy ilyen szerkezetű összetett mondat tehát akkor és csak akkor igaz, ha p és q közül legalább az egyik igaz. De akkor (14)-et kifejezhetjük a tömörebb "*p vagy q*" alakban is. Ugyanis nyelvünkben a 'vagy' kötőszónak van olyan jelentése, amely azt fejezi ki, hogy a vele összekapcsolt két mondat közül legalább az egyik (esetleg mindkettő) igaz. Szokás ezt *megengedő* értelmű 'vagy'-nak mondani, mert megengedi (nem zárja ki) a két tagmondat együttes igazságát, szemben a *kizáró* értelmű 'vagy'-gyal, amely kizárja a tagok konjunkciójának igazságát. Mostanában elterjedőben van – angol mintára – az 'és/vagy' fordulat a 'vagy' megengedő értelmű használatának jelzésére. A latinban a 'vagy' megengedő értelmét általában a 'vel', kizáró értelmét pedig az 'aut' kötőszóval fejezték ki.

Ezek szerint (13.1)-et tömören így fejezhetjük ki:

Esik az eső, *vagy* fúj a szél.

A 'vagy' kötőszó ezen jelentését *alternációnak* mondjuk, és a '$\vee$' szimbólummal jelöljük. (Kiejtése: 'vel', vagy egyszerűen 'vagy'.)

Az alternációt a negáció és a konjunkció segítségével definiált funktornak tekintjük:

(T5) $p \vee q \Leftrightarrow \sim (\sim p \ \& \sim q)$ *(Definíció)*

Faktuális értékét a következő táblázat adja meg:

$\vee$	1	0
1	1	1
0	1	0

Hasonlítsuk össze a konjunkció és az alternáció faktuális értékét rögzítő szabályokat:

A konjunkció akkor és csak akkor *igaz,* ha mindkét tagja *igaz.*

Az alternáció akkor és csak akkor *hamis,* ha mindkét tagja *hamis.*

Ha a konjunkció szabályában az 'igaz' minden előfordulását felcseréljük a 'hamis'-ra, megkapjuk az alternáció szabályát; utóbbiból pedig a 'hamis'-at 'igaz'-ra cserélve, kapjuk az előbbit. Ha az alternáció fenti táblázatában az 1-et mindenütt 0-ra, a 0-t pedig 1-re cseréljük fel, ezt kapjuk:

	0	1
0	0	0
1	0	1

Ebben pedig fölismerhetjük a konjunkció táblázatát, csak éppen a sorok és az oszlopok sorrendje fordított az eredetihez képest. Tehát a konjunkció és az alternáció faktuális értékei között az az összefüggés, hogy az egyikből a másik a 0 és az 1 (a 'hamis' és az 'igaz') szerepének fölcserélésével jön létre. Ezt úgy szokás kifejezni, hogy a *konjunkció* és az *alternáció egymás duálisai.* E dualitás alapján a konjunkció minden törvényének megfelel az alternáció egy-egy törvénye. Mindenekelőtt az alternáció is *kommutatív és asszociatív,* és így bevezethető az akárhány tagú alternáció:

$$p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n \ (n \geq 2),$$

azzal a nyilvánvaló szabállyal, hogy akkor és csak akkor igaz, ha van legalább egy igaz tagja. Mivel az alternáció a konjunkció duálisa, a konjunkció (T2) ... (T4) törvényeiből a dualitásra hivatkozva nyerjük az alternáció alábbi törvényeit:

(T6) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p,$

(T7) $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r),$

(T7a) $p \vee p \Leftrightarrow p$

(T8) $p_i \Rightarrow (p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \ (i = 1,2, \ldots, n; n \geq 2).$

Igaz, hogy (T8) szerint nemigen szoktunk következtetni (a mindennapi esetekben), a tudományos munka elméleti rendszerezésében azonban erre is szükség lehet.

Ha két állítás logikailag ekvivalens, akkor negációik is ekvivalensek. Ennek alkalmazásával kapjuk a (T5) definícióból a következőt:

$$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim \sim (\sim p \ \& \sim q).$$

A jobb oldalon a kettős negációjelet törölhetjük (T1) alapján: $\sim\sim p \Leftrightarrow p$

(T9) $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \ \& \sim q).$

Szavakban: *alternáció negációja logikailag ekvivalens a tagok negáltjainak konjunkciójával.* Ez ténylegesen kettőnél több tagú alternációra is igaz. (Indokoljuk meg, miért!) Illusztráció:

Nem igaz, *hogy* (az elnök lemond, *vagy* a titkárt menesztik)
⇔ (az elnök *nem* mond le, *és* a titkárt *nem* menesztik).

Írjunk most (T5)-ben p helyére "$\sim p$"-t, q helyére pedig "$\sim q$"-t (természetesen mindenütt). Az eredmény:

$$(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim (\sim \sim p \,\&\, \sim \sim q).$$

A jobb oldalon a '$\sim \sim$' jeleket törölhetjük. Egyúttal cseréljük föl a jobb és a bal oldalt (ezt nyilván megtehetjük):

$$\text{(T10)} \quad \sim (p \,\&\, q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q).$$

Szavakban: *konjunkció negációja logikailag ekvivalens a tagok negáltjainak alternációjával.* Ez is igaz kettőnél több tagú konjunkcióra is. (Miért?) Illusztráció:

Nem igaz, *hogy* (Péter elment, *és* Mária megjött) ⇔
(Péter *nem* ment el, *vagy* Mária *nem* jött meg).

A (T9)–(T10) törvényeket *De Morgan-törvényeknek* szokás nevezni. (A. De Morgan angol logikusról, aki a múlt században újra tudatosította ezeket a már korábban is ismert, de közben elfeledett összefüggéseket.)

Alkalmazzunk most negációt (T10) mindkét oldalára, és a bal oldalon hagyjuk el a kettős negációjelet:

$$\text{(T11)} \quad (p \,\&\, q) \Leftrightarrow \sim (\sim p \vee \sim q).$$

E törvény azt mutatja, hogy a konjunkció kifejezhető negáció és alternáció segítségével. A „fordítottját", azaz hogy az alternáció kifejezhető konjunkció és negáció segítségével, már tudtuk, hiszen (T5) alatt az alternációt éppen így definiáltuk. Most látjuk, hogy a konjunkció és az alternáció kapcsolatában a konjunkciónak nincs kitüntetett szerepe.

Ha egy (kéttagú) alternáció igaz, ám egyik tagja hamis, akkor másik tagjának igaznak kell lennie (hiszen ha mindkét tag hamis, akkor alternációjuk is hamis). Ezen alapul az alábbi két következtetési séma:

$$\text{(T12)} \quad \text{(a) } \{p \vee q, \sim p\} \Rightarrow q; \text{ (b) } \{p \vee q, \sim q\} \Rightarrow p.$$

E sémákban két-két premissza szerepel; ezeket kapcsos zárójelekkel határoltuk. Hasonló jelölést alkalmazunk kettőnél több premissza esetén is.

Vegyük észre, hogy a "$p \vee \sim p$" alakú állítás nem lehet hamis, bármilyen igazságértékű is "p". Vagyis a "$p \vee \sim p$" alakú állítás logikai igazság kifejezője. Ha az alternáció (T5) alatti definícióját tekintjük, akkor a "$p \vee \sim p$" a "$\sim (\sim p \,\&$

$\sim\sim p)$"-vel adható meg. Törölve a kettős negáció jelét és fölcserélve a konjunkció tagjainak sorrendjét ezt a logikai igazságot kapjuk:

$\sim(p \ \& \sim p)$

A logikai igazságokat a következőképpen ábrázoljuk:

$\Rightarrow (p \vee \sim p)$

$\Rightarrow \sim(p \ \& \sim p)$

Az, hogy a nyíl bal oldalára nem írunk semmit, azt a tényt fejezi ki, hogy a logikai igazságok nem premisszafüggőek, önmaguk jogán igazak.

5.6. KONDICIONÁLIS

Gyakori összetett állításforma a "ha *p*, (akkor) *q*". Ilyen szerkezetű állítást (normálisan) akkor használunk, ha sem *p*, sem *q* igazságértékét nem ismerjük, de valami alapunk van arra, hogy *p* igazsága esetén *q* is igaz. Az ilyen szerkezetű állításokat *feltételes állításoknak* mondjuk. A feltételes állításban külön-külön sem *p*-t, sem *q*-t nem állítjuk, bár azt a fordulatot használhatjuk, hogy *q*-t *feltételesen* állítjuk, tudniillik azzal a feltétellel, hogy *p* igaznak bizonyul. (Hogy mi lesz akkor, ha *p* hamisnak bizonyul, arról a "ha *p*, *q*" feltételes állítás nem mond semmit.)

A "ha *p*, (akkor) *q*" szerkezetben *p*-t *előtag*nak, *q*-t pedig *utótag*nak mondjuk. Világos, hogy ezek általában nem cserélhetnek szerepet az információtartalom megváltozásának kockázata nélkül. Ezt illusztrálja a következő példa:

Ha orvosi vizsgálatra megyek, tiszta fehérneműt veszek.
Ha tiszta fehérneműt veszek, orvosi vizsgálatra megyek.

Kommentár aligha szükséges.

Nehéz általános választ adni arra a kérdésre, hogy mi a feltételes állítás igazságának kimerítő feltétele. Viszont könnyű mondani egy olyan körülményt, amely mellett "ha *p*, *q*" biztosan hamis; ez pedig az előtag igazságának és az utótag hamisságának esete. Világos, hogy ha *p* igaznak, *q* pedig hamisnak bizonyul, az *közvetlen cáfolata* a "ha *p*, *q*" állításnak. Következésképp: ha azt állítjuk, hogy "ha *p*, *q*", akkor tagadjuk "$p \ \& \sim q$"-t, azaz állítjuk, hogy

(15) $\sim (p \ \& \sim q)$.

A 'ha' kötőszó – a 'vagy'-hoz hasonlóan – többértelmű, de valamennyi jelentésének közös minimális tartalma annak tagadása, hogy előtagja és utótagjának negáltja együttesen igazak. Tehát bármely "ha *p*, (akkor) *q*" szerkezetű állítás minimális információtartalma az, amit (15) fejez ki. Előfordul, bár viszonylag ritkán, hogy nem is szándékozik ennél többet mondani; ez valószínű a következő példában:

Ha Péter kedden nem jön, akkor (Péter) szerdán jön.

A 'ha'-t azonban gyakran más módon, például törvénykijelentések megformálására is használjuk: föltesszük, hogy előtagjának igazsága valamilyen törvényszerűség alapján maga után vonja utótagja igazságát. Ekkor az argumentumok igazságértékétől függetlenül is érvelhetünk a feltételes állítás mellett vagy ellen, kimutatva például, hogy az előtag *lehetne* igaz, s ugyanakkor az utótag hamis (cáfolás), vagy azt, hogy ilyen lehetőség nincs: ha az előtag igaz *lenne,* az utótag is igaz *lenne* (védelem). Ilyen feltételes állítás lehet például a következő: 'Ha a házaspárok száma osztható 3-mal, akkor a férjek és a feleségek összlétszáma osztható 6-tal.' Ha tárgyalási univerzumunkban minden házas személynek a házastársa is jelen van, akkor e feltételes állítás előtagjának igazsága szükségszerűen maga után vonja utótagjának igazságát. Ezt jelezhetjük a 'szükségszerű, hogy' elébe illesztésével. Hasonló természetű a 'ha ma szerda van, tegnapelőtt hétfő volt' feltételes állítás is.

A feltételes állításokat mint következtetések premisszáit azonban kiválóan hasznosíthatjuk már akkor is, ha csak minimális közös tartalmukat használjuk föl, amely a (15) séma szerint igazságfunktorokkal (negáció és konjunkció) kifejezhető. A (15) szerkezet rövidítésére bevezetjük a "$p \supset q$" sémát, amelyet *kondicionális*nak mondunk, s amelyben p az *előtag,* q pedig az *utótag.*

(T13) $(p \supset q) \Leftrightarrow \sim (p \,\&\, \sim q)$ *(Definíció)*

A '$\supset$' (patkó) természetesen igazságfunktor; az iménti definíció folytán faktuális értéke a következő táblázatba foglalható:

$\supset$	1	0
1	1	0
0	1	1

A kondicionális akkor és csak akkor hamis, ha *közvetlenül cáfolható:* előtagja igaz, és utótagja hamis. Hamis előtagú vagy igaz utótagú kondicionális mindig igaznak számít.

Helyettesítsük (T13)-ban p-t "$\sim q$"-val, q-t pedig "$\sim p$"-vel:

$$(\sim q \supset \sim p) \Leftrightarrow \sim (\sim q \,\&\, \sim\sim p).$$

A jobb oldalon törölhetjük '$\sim\sim$'-t, és a konjunkció két tagjának sorrendjét fölcserélhetjük:

(16) $(\sim q \supset \sim p) \Leftrightarrow \sim (p \,\&\, \sim q).$

Látjuk, hogy (16) jobb oldala ugyanaz, mint (T13) jobb oldala. Ebből következik, hogy (16) és (T13) bal oldalai logikailag ekvivalensek egymással:

(T14) $(p \supset q) \Leftrightarrow (\sim q \supset \sim p)$.

Ha a kondicionális tagjainak sorrendjét fölcseréljük, és mindkét tagot negáljuk, a kapott kondicionálist az eredeti *kontraponáltjá*nak mondjuk. Mivel a kettős negációjel törölhető, a kontraponált kontraponáltja az eredeti kondicionális. (Így "$p \supset q$" kontraponáltja "$\sim q \supset \sim p$", ennek kontraponáltja "$\sim \sim p \supset \sim \sim q$", azaz, egyszerűsítés után, "$p \supset q$".) Ezért azt mondhatjuk, hogy "$p \supset q$" és "$\sim q \supset \sim p$" egymás *kontraponáltjai*

A (T14) törvény tehát azt mondja ki, hogy *bármely kondicionális logikailag ekvivalens a kontraponáltjával. Ez a kontrapozíció törvénye.*

A tagok puszta fölcserélését a kondicionálisban *megfordításnak* (*konverzió*nak) mondjuk. Példával illusztráltuk, hogy a feltételes állításban a megfordítás módosíthatja az információtartalmat. Ugyanez igaz a kondicionálisra is: "$p \supset q$" és "$q \supset p$" igazságfeltételei általában nem azonosak. (Győződjünk meg erről hamisságuk feltételeinek összehasonlításával!)

A kondicionális nem is asszociatív: "$(p \supset q) \supset r$" és "$p \supset (q \supset r)$" igazságfeltételei egészen mások. (Legyen például p és r hamis, q pedig igaz. Számítsuk ki mindkét összetett kifejezés igazságértékét!)

Ha egy kondicionális igaz, és előtagja is igaz, akkor utótagjának is igaznak kell lennie. Helyes tehát az alábbi következtetési séma:

(T15) $\{p \supset q, p\} \Rightarrow q$.

Ezt *leválasztási szabály*nak nevezzük. (Igaz kondicionális igaz előtagját „leválasztva" a visszamaradó utótagnak is igaznak kell lennie.) Középkori elnevezése: *modus ponens.* (Kb. 'tételező mód'.)

Az alábbi séma (T15) egy változata:

$\{\sim q \supset \sim p, \sim q\} \Rightarrow \sim p$.

Itt azonban – (T14) folytán – "$\sim q \supset \sim p$" helyett a kontraponáltját, "$p \supset q$"-t írhatjuk:

(T16) $\{p \supset q, \sim q\} \Rightarrow \sim p$.

Ha egy igaz kondicionális utótagja hamis, előtagjának is hamisnak kell lennie. Ez az *előtag indirekt cáfolásának szabálya.* Középkori elnevezése: *modus tollens* (kb. 'elvevő mód').

Tegyük föl, hogy "$p \supset q$" és "$q \supset r$" igazak. Ekkor: ha p igaz, akkor q-nak is igaznak kell lennie, de ha q igaz, akkor ("$q \supset r$" igazsága folytán) r-nek is igaznak

kell lennie; tehát föltevéseink kizárják azt, hogy p igaz, r pedig hamis legyen, azaz kikényszerítik "$p \supset r$" igazságát. Ezzel igazoltuk az alábbi következtetési sémát:

(T17) $\{p \supset q, q \supset r\} \Rightarrow p \supset r.$

Ez a kondicionális *láncszabálya.*
Vegyük észre, hogy a konjunkció és az alternáció is kifejezhető kondicionális segítségével:

(T18) $p \vee q \Leftrightarrow \sim p \supset q$
(T19) $p \,\&\, q \Leftrightarrow \sim (p \supset \sim q)$

További törvényszerűségek a kondicionális igazságfeltételének felhasználásával:

(T20) $p \supset (q \supset r) \Leftrightarrow (p \,\&\, q) \supset r$

Végül egy logikai igazság:

$\Rightarrow p \supset p$

A feltételes állítást a "ha p, (akkor) q" szabványforma helyett másképp is ki lehet fejezni. Néha az előtag (a feltétel) hátra kerül, de így is felismerhető a 'ha', vagy a 'feltéve, hogy' előtétről:

Kirándulni megyünk, *föltéve hogy* nem esik az eső.
Telefonálok, *ha* szükség lesz a segítségedre.

Megemlítjük, hogy "kivéve, ha p" annyi mint "feltéve, hogy $\sim p$". Például: 'Meglátogatlak, *kivéve ha* esik az eső' nem más, mint 'Meglátogatlak, *feltéve hogy nem* esik az eső', azaz 'Ha nem esik az eső, meglátogatlak'.
Speciális eset a következő:

(17) Csak akkor kapsz diplomát, ha kifizeted a tandíjadat.

Ennek információtartalma a következő:

(18) Ha nem fizeted ki a tandíjad, nem kapsz diplomát.

(Persze, lehet hogy akkor sem kapsz, ha kifizeted.) Kontraponálva:

(19) Ha diplomát kapsz, kifizeted a tandíjadat.

Úgy tűnik, ez mást mond, mint (18) és (17). E látszat oka az, hogy a két tagmondat ki nem mondott, ám különböző időadatokat tartalmaz: a tandíjfizetés időpontja korábbi, mint a diplomaosztás időpontja. Magyar nyelvhasználati szabály: ha a feltételes állítás két tagmondata nem egyidejű, akkor a feltétel az előidejű. Tehát (17)-et így értjük: 'Csak akkor kapsz diplomát, *ha előzőleg* kifizetted a tandíjadat.' Megfelelően (19): 'Ha diplomát kapsz, *előzőleg* kifizetted a tandíjadat'; és így már rendben van. Mindamellett a (18) változat világosabb fogalmazású; ezért a következő szabályt rögzítsük:

(20) (Csak akkor p, ha q) $\Leftrightarrow$ (Ha $\sim q$, $\sim p$).

A példa során felfigyeltünk arra is, hogy ha a feltételes állításban az előtag előidejű az utótaghoz képest, akkor az állítás kontraponáltja „rossz hangzású", félrevezető. Ezt az előidejűség explicit jelzésével enyhíthetjük.

Másik észrevételünk: a

(21) csak akkor p, ha q

sémában a q mondat éppúgy *feltétel*nek tűnik (p-hez viszonyítva), mint ahogyan a szabványos "ha p, (akkor) q"-ban p a feltétele q-nak. Ez igaz is: (21)-ben azt állítjuk, hogy q igazsága nélkül p nem lehet igaz, de azt nem állítjuk, hogy q igazsága *elegendő* is p igazságához. Azaz, (21) azt állítja, hogy p igazságának *szükséges* – de esetleg nem elegendő – feltétele q igazsága. Ezzel szemben "ha p, q" azt állítja, hogy p igazsága *elegendő* – de esetleg nem szükséges – feltétel q igazságához.

5.7. BIKONDICIONÁLIS

Azt, hogy p igazsága elegendő is, szükséges is q igazságához, az iméntiek alapján a következő konjunkcióval fejezhetjük ki:

(22) Ha p, (akkor) q, és csak akkor q, ha p.

Fogalmazzuk át a konjunkció második tagját (20) szerint:

(23) Ha p, (akkor) q, és ha $\sim p$, (akkor) $\sim q$.

Ha p és q egyidejűek, vagy időtől függetlenek, a konjunkció második tagját helyettesíthetjük a kontraponáltjával:

(24) Ha p, (akkor) q, és ha q, (akkor) p.

A (22), (23), (24) formák – a szavak normális használata mellett – azonos információtartalom kifejezésére szolgálnak. Közülük (24) mutatja, hogy e formák *egy feltételes állítás és megfordítása* együttes állítására szolgálnak. A (22) forma viszont alkalmat ad a következő tömörítésre:

(25) Akkor és csak akkor q, ha p.

Ez a kifejezési forma a matematikusok szaknyelvéből származik (a német 'dann und nur dann' tükörfordítása), napjainkban azonban már eléggé elterjedt a művelt köznyelvben is. (E tankönyvben is rendszeresen használtuk már eddig is.) A köznapi beszédben 'akkor és csak akkor' helyett egy igen nyomatékos 'akkor' használatos, például:

Akkor megyek, ha hívsz.
Péter **akkor** látogatja meg apját, ha pénzre van szüksége.

(Mint látjuk, az 'akkor' az első tagmondat állítmánya elé kerül.) Megjegyezzük, hogy néha 'csak akkor'-t használnak ugyanilyen helyzetben. Ez alkalomadtán kétértelműséget eredményezhet a 'ha' utáni feltétel értékelésében (csak szükséges a feltétel, vagy egyben elegendő is?).

Ha (23)-ban és (24)-ben a feltételes állításokat kondicionálisokként értelmezzük, a következő logikai szerkezeteket kapjuk:

$(p \supset q)\ \&\ (\sim p \supset \sim q)$, $(p \supset q)\ \&\ (q \supset p)$.

Persze, e sémák logikailag ekvivalensek (a kontrapozíció törvénye folytán). Rövidítésükre bevezetjük a "$p \equiv q$" formát, amelyet *bikondicionális*nak mondunk (annyi mint kettős kondicionális). A bikondicionális tehát így definiálható:

(T21) $(p \equiv q) \Leftrightarrow (p \supset q)\ \&\ (q \supset p)$ *(Definíció)*

A '≡' jel is igazságfunktor, faktuális értékét a következő táblázat ábrázolja:

≡	1	0
1	1	0
0	0	1

Szavakban: *a bikondicionális akkor és csak akkor igaz, ha két bemenetének igazságértéke azonos.*

Látható, hogy a bikondicionálisban a bemenetek fölcserélhetők, vagyis e funktor is kommutatív (sőt asszociatív is). Az alábbi triviális következtetési sémák ellenőrzését az olvasóra bízzuk:

(T22) $(p \equiv q) \Rightarrow (p \supset q)$; $(p \equiv q) \Rightarrow (q \supset p)$.

(T23) $\{p \equiv q, q \equiv r\} \Rightarrow (p \equiv r)$.

Egy triviális logikai igazság: $\Rightarrow p \equiv p$

A bikondicionális igazságából és egyik tagjának igazságából következik a másik igazsága (illetve hamisságából hamissága).

$\{p \equiv q, p\} \Rightarrow q$. $\{p \equiv q, \sim q\} \Rightarrow \sim p$

A negált bikondicionális $[\sim (p \equiv q)]$ akkor és csak akkor igaz, ha a bikondicionális két tagjának különböző az igazságértéke. Így alkalmas a *kizáró* értelmű extenzionális 'vagy' kifejezésére. Vezessük be e funktor jeleként a '∇' szimbólumot, s használatára a következő definíciót:

(T24) $(p \nabla q) \Leftrightarrow \sim (p \equiv q)$ *(Definíció)*

E funktor faktuális értéke:

∇	1	0
1	0	1
0	1	0

Látható, hogy ez is kommutatív (sőt asszociatív is).

A negált bikondicionálist így is megadhatjuk:

$\sim(p \equiv q) \Leftrightarrow (p \,\&\, \sim q) \vee (\sim p \,\&\, q)$

Ha p és q ellentétes igazságértékűek (egyik igaz, másik hamis), akkor bármelyikük negáltja egyező igazságértékű a (negálatlan) másikkal. Ezen az alapon érvényesek a következő logikai ekvivalenciák:

(T25) $(p \nabla q) \Leftrightarrow (\sim p \equiv q)$; $(p \nabla q) \Leftrightarrow (p \equiv \sim q)$.

Szokás még önálló jelet bevezetni a konjunkció és az alternáció negációjára is:

(T26), $p \mid q \Leftrightarrow \sim (p \,\&\, q)$ *(Definíció)*

(T27) $p \mid\mid q \Leftrightarrow \sim (p \vee q)$ *(Definíció)*

A (T9) De Morgan-szabály alapján (T27) jobb oldala "$\sim p \,\&\, \sim q$" alakban is írható:

(T28) $p \mid\mid q \Leftrightarrow (\sim p \,\&\, \sim q)$.

A '|' funktort *Sheffer*-funktornak, a '| |' funktort pedig *sem-sem* funktornak szokás nevezni (az utóbbi elnevezést (T28) motiválja). Az olvasó könnyen ellenőrizheti az alábbiakat:

(T29) $p \mid p \Leftrightarrow \sim p$,

(T30) $(p \mid q) \mid (p \mid q) \Leftrightarrow (p \,\&\, q)$,

(T31) $p \mid\mid p \Leftrightarrow \sim p$,

(T32) $(p \mid\mid q) \mid\mid (p \mid\mid q) \Leftrightarrow (p \vee q)$.

Ezekből és korábbi eredményeinkből folyik, hogy akár a Sheffer-, akár a sem-sem funktor alkalmas arra, hogy ismételt alkalmazásai révén az eddig megismert igazságfunktorok mindegyikét ki tudjuk fejezni.

5.8. IGAZSÁGFÜGGVÉNYEK

Az igazságfunktorok faktuális értékeit igazságfüggvényeknek mondjuk. Az igazságfüggvényeket rendszeresen használják a számítástechnikában, a számítógépek programozásában. Az egyes igazságfüggvényeket többnyire ugyanúgy nevezik és jelölik, mint a nekik megfelelő igazságfunktorokat.

Az igazságfüggvények argumentumai nem mondatok, hanem igazságértékek. Ezeket a számítástechnikában is többnyire a 0, 1 számjegyekkel jelölik (ahogyan e könyvben is).

Az igazságfüggvény fogalma a grammatikai kategóriákra való hivatkozás nélkül is megadható. Nevezetesen:

n-argumentumú (n-változós) igazságfüggvényen olyan függvényt értünk, amely igazságérték-bemenetekhez (argumentum értékekhez) igazságérték-kimeneteket (függvényértékeket) rendel.

Egy ilyen függvény a következő alakú táblázattal adható meg:

argumentumértékek 1. 2. ... *n*.	függvényérték
---	---

Egyargumentumú függvény esetén e táblázat kétsoros. Ha az argumentumszámot eggyel növeljük, a sorok száma megkétszereződik (hiszen minden „régi" sorozatot meg kell hosszabbítani egy új taggal, és az vagy 0, vagy 1 lehet). Ennélfogva egy *n*-argumentumú igazságfüggvény táblázatának 2^n sora van. A kétargumentumúak 4-, a háromargumentumúak 8-sorosak, és így tovább.

Az igazságfüggvények száma végtelen. Van-e minden igazságfüggvényhez olyan igazságfunktor, amelynek éppen e függvény a faktuális értéke? Sejthető, hogy egy „műnyelv" segítségével igenlő válasz adható e kérdésre, de ebből még nem feltétlenül adódik, hogy az összes igazságfüggvényt természetes nyelvi formában is ki tudjuk fejezni.

Megmutatjuk, hogy *a* $\sim$, &, $\vee$ *funktorok kombinált* alkalmazásai *révén bármely igazságfüggvény „kifejezhető"*.

Ha igazságfüggvényünk n-változós, vezessük be a $p_1, p_2, \ldots, p_n$ mondatparamétereket, amelyeket a függvény kifejezésére majd föl fogunk használni. Tekintsük most a függvény értéktáblázatának egy olyan sorát, amelyben a függvényérték (a kimenet) 1. Képezzünk e sorhoz egy n-tagú ún. *elemi konjunkciót* a következő szabály szerint:

Ha a szóban forgó sorban az argumentum i-edik tagja 1, akkor a konjunkció i-edik tagja legyen p_i, az ellenkező esetben pedig "$\sim p_i$" ($i = 1, 2, \ldots, n$). Az $n = 1$ esetben „egytagú" konjunkció lesz, azaz p_1 vagy "$\sim p_1$".

Világos, hogy e konjunkció akkor és csak akkor igaz, ha a benne szereplő $p_1, p_2, \ldots, p_n$ paraméterek olyan állításokat képviselnek, amelyek igazságértékei rendre megegyeznek a táblázat szóban forgó sorában előírt bemeneti értékekkel: p_i igaz, ha az i-edik helyen 1 szerepel, és hamis máskor.

Illusztrációként tekintsük az alábbi háromargumentumú igazságfüggvényt:

1.	2.	3.	
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	1
máskor			0

(Az utolsó 5 sort összevontuk a 'máskor' jelzéssel.) Ennek első három sorához rendre a következő elemi konjunkciókat képezzük:

$$p_1 \,\&\, \sim p_2 \,\&\, \sim p_3,$$

$$\sim p_1 \,\&\, p_2 \,\&\, \sim p_3,$$

$$\sim p_1 \,\&\, \sim p_2 \,\&\, p_3.$$

Képezzük az 1 értékű sorokhoz tartozó elemi konjunkciók alternációját. (Ha csak egy ilyen sor van, akkor a hozzá tartozó elemi konjunkció lesz az „egytagú" alternáció.) A kapott séma lesz a függvénytáblázatnak megfelelő séma; hiszen az alternáció éppen akkor igaz, ha valamely tagja igaz, az alternáció tagjaiként föllépő elemi konjunkciók pedig éppen a táblázat előírásainak megfelelő igazságfeltételeket fejezik ki. A példaként szereplő igazságfüggvényt a következő séma ábrázolja:

$$(p_1 \,\&\, \sim p_2 \,\&\, \sim p_3) \vee (\sim p_1 \,\&\, p_2 \,\&\, \sim p_3) \vee (\sim p_1 \,\&\, \sim p_2 \,\&\, p_3).$$

Ha a táblázatnak nincs 1 kimenetű sora, vagyis ha a függvény értéke minden argumentumra 0, akkor a leírt eljárás nem alkalmazható. De ekkor megfelel a következő séma:

$$p_1 \,\&\, \sim p_1 \,\&\, p_2 \,\&\ldots\&\, p_n,$$

hiszen e konjunkció mindig hamis (és egyébként n különböző mondatparaméter szerepel benne). Az alternációt negáció és konjunkció segítségével definiáltuk [lásd (T5)], tehát az igazságfüggvények kifejezésében mellőzhető. Ezért:

Minden igazságfüggvény kifejezhető pusztán negáció és konjunkció segítségével.

A $\sim$, & funktorok viszont egyértelműen kifejezhetők a természetes nyelv szavaival. Ezek szerint az igazságfüggvények mind kifejezhetők anyanyelvünkön, bár kifejezésük bonyolult lehet, és egy-egy argumentum többszöri említésére kényszeríthet. Ezért van becsületük (a 'nem' és az 'és' mellett) az egyéb igazságfunktoroknak. A leggyakrabban használt igazságfunktorok:

$$\sim,\ \&,\ \vee,\ \supset,\ \equiv.$$

Akár az alternáció, akár a kondicionális alkalmas a konjunkció kifejezésére (persze a negációt is fölhasználva; lásd (T11) és (T19)). Így akár a ($\sim$, $\vee$) pár, akár a ($\sim$, $\supset$) pár is alkalmas minden igazságfüggvény kifejezésére.

A (T29), ..., (T32) törvényekből és az iméntiekből következik, hogy akár a Shefferfunktor, akár a sem-sem funktor egymagában is elegendő minden igazságfüggvény kifejezésére.

Ellenőrző kérdések

5.1. Mi jellemzi a logikai funktorokat?

5.2. Mit értünk általánosan igazságfunktoron?

5.3. Mi a szerepük a mondatparamétereknek a logikai törvények megfogalmazása szempontjából?

5.4. Mit értünk logikai ekvivalencián?

5.5. Mi a negáció, hogyan jelöljük, s mi az igazságfeltétele?

5.6. Milyen nyelvi formák alkalmasak a negáció kifejezésére?

5.7. Mit tudunk a negáció ismételt alkalmazásáról?

5.8. Mi a konjunkció, hogyan jelöljük, s mi az igazságfeltétele?

5.9. Milyen nyelvi formákkal lehet kifejezni a konjunkciót?

5.10. Mit értünk azon, hogy a konjunkció kommutatív és asszociatív? Hogyan értelmezzük a többtagú konjunkciót?

5.11. Mi az alternáció, hogyan jelöljük? Mi a feltétele annak, hogy két vagy több állítás alternációja igaz legyen?

5.12. Ismertesse a De Morgan-törvényeket!

5.13. Milyen hasonlóság van a konjunkció és az alternáció között?

5.14. Hogyan fejezhető ki a kondicionális negáció és konjunkció segítségével?

5.15. Mi a kondicionális igazságföltétele? Mit mondhatunk a kondicionálisról, ha előtagja hamis? És ha utótagja igaz?

5.16. Milyen nyelvi kifejezési formái vannak a kondicionálisnak?

5.17. Mi a különbség a kondicionális megfordítása és kontraponálása között?

5.18. Ismertesse a kondicionális kontrapozíció-törvényét!

5.19. Ismertesse a leválasztási szabályt és az előtag indirekt cáfolásának szabályát!

5.20. Ismertesse a kondicionális láncszabályát!

5.21. Hogyan értelmezzük a bikondicionálist? Mi az igazságföltétele?

5.22. Hogyan fejezhető ki a kizáró értelmű 'vagy' a bikondicionális segítségével? Mi az igazságföltétele?

Gyakorló feladatok

5.1. Írjuk át a természetes nyelven fogalmazott negációkat a '$\sim$' jel használatával a következő mondatokban! A negációjel argumentumát határoljuk zárójelekkel. [5:5, 6,7.]

a) Péter nem ment haza.

b) Éva nem szőke.

c) Nem igaz, hogy Péter nem ment haza.

d) Nem áll, hogy nem igaz, hogy Éva nem szőke.

e) Péter vagy nem ment haza, vagy nem maradt otthon, de nem áll, hogy otthon van.

f) Nem igaz, hogy ha Éva nem szőke, akkor nem Juli volt az, akit nem értem utol.

5.2. Írjuk ki a konjunkciókat és a negációkat logikai jelükkel a következő mondatokban! [5:5,6,8,9.]

a) Éva szőke, mindazonáltal nekem nem tetszik, annak ellenére, hogy a szőkéket kedvelem.

b) Tivadar hazament, de nem maradt otthon, bár mindenki ezt várta tőle.

c) Esik az eső, de nincsen hideg, és a szél sem fúj.

c) Ha hazajössz, és be is vásárolsz, nekem nem kell lemennem, és megfőzhetem az ebédet.

d) Sem utódja, sem boldog őse, sem rokona, sem ismerőse nem vagyok senkinek, nem vagyok senkinek.

5.3. Részletezzük a konjunkció asszociatív tulajdonságának igazolását! (Lásd a (T3) törvényt az 5.4. szakaszban.)

5.4. A következő mondatokban helyezzük el a negáció, a konjunkció és az alternáció jelét, ahol ezek köznyelvi formában szerepelnek! Zárójelek használatával jelöljük ki e funktorok argumentumait is! [5:5,6,8,9,11.] Ha valamelyik mondat többértelműnek tűnik, készítsünk alternatív megoldásokat.

a) Aladár vagy Béla otthon van, de nincs otthon mind a kettő.

b) Juli elmegy, és Éva itt marad, vagy mind a ketten elmennek, és Juli vissza sem jön, de Éva vagy visszajön, vagy nem.

c) Ha nem esik az eső, de vagy süt a Nap, vagy a szél nem fúj, akkor elindulunk, és szerencsésen meg is érkezünk; vagy megváltozik az idő, és vagy tábort verünk valahol, vagy visszafordulunk.

5.5. Alakítsuk át az előbbi feladat mondatait úgy, hogy a bennük szereplő alternációkat kifejezzük negáció és konjunkció segítségével! Az esetleg föllépő kettős negációkat küszöböljük ki. [5:7,11,12.]

5.6. Mutassuk ki, hogy a De Morgan-törvények kettőnél több tagú konjunkcióra, illetve alternációra is alkalmazhatók! (Lásd a (T9), (T10) törvényeket az 5.5. szakaszban.)

5.7. Írjuk ki a kondicionális jelét az alábbi feltételes állításokban, kijelölve az argumentumokat is! [5.16.]

a) Ha ismerem a szabályt, és tudom, hogyan kell alkalmazni, jó eredményt kapok, feltéve hogy nem vétek hibát.

b) Ha Albert nem járul hozzá, és Bálint tartózkodik, a javaslat megbukik.

c) Szivárvány csak akkor van, ha a Nap is süt, az eső is esik, és nincsen dél.

5.8. Mutassuk meg, hogy a kondicionális megfordítása megváltoztathatja az igazságértéket.

5.9. Igazoljuk, hogy "$(p \supset q) \supset r$" és "$p \supset (q \supset r)$" igazságértéke lehet különböző.

5.10. Formalizáljuk az alábbi mondatokat, azaz a logikai funktorokat helyettesítsük jelükkel, a tovább már nem bontható részmondatokat mondatparaméterekkel, és helyezzük el az egyértelműséget biztosító zárójeleket is! Foglaljuk „szótárba", hogy melyik részmondatot mely paraméterrel helyettesítjük! [5:3,6,9,11,16,21,22.)

a) Nem sikerül a kísérlet, és meg kell ismételni a kutatást; vagy sikerül a kísérlet, és publikálhatjuk az eredményeket.

b) Nem áll, hogy esik az eső és süt a Nap; azaz vagy nem esik az eső, vagy nem süt a Nap.

c) Kizárt, hogy nem vizsgázom le matematikából vagy fizikából első kísérletre, vagy a nyelvvizsgát nem teszem le április végéig.

d) A gyámhatóság, az intézeti gyámság esetét kivéve, gyámot rendel a szülői felügyelet alatt nem álló kiskorú részére.

5.11. Igazoljuk a (T18), (T19), (T20) törvényeket, az 5.6. szakaszban adott útmutatások alapján.

5.12. Képezzük az alábbi három állítás negációját! Van-e köztük olyan pár, amelyben az egyik a másiknak a negációja?

a) A gazdaság termelékenysége növekszik.

b) A gazdaság termelékenysége csökken.

c) A gazdaság termelékenysége stagnál.

5.13. Keressük ki az alábbi állításokban a konjunkciókat, és írjuk be az '&' jeleket:

a) Frédi – miközben Vilma aludt – elrejtette a zsákmányt, Béni pedig átöltözött, és eltüntette a nyomokat.

b) Ott voltam az előadáson, viszont lemaradtam a mérkőzésről.

c) Titusz, aki lerántotta a törököt, hős volt.

d) Andor, aki elvette Bandi húgát, sógora Céliának, akinek a férje most Dezső főnöke.

5.14. Írjuk föl az alábbi állítások és negációik logikai szerkezetét, a De Morgan-törvények alkalmazásával többféle alakban is:

a) Antal elkésett, Béla pedig meg sem jött.

b) Nem igaz, hogy a titkárnő pletykás vagy intrikus lenne.

c) Elmegyek, és vissza sem jövök, vagy pedig újrakezdem az egészet, de akkor is elmegyek.

d) A szakállas sokáig kiabált, de vagy nem hallották, vagy nem volt ember a közelben.

5.15. Írjuk fel az alábbi állítások szerkezetét kifejező formulákat:

a) Esik az eső, bár süt a Nap.

b) Ha esik az eső és süt a Nap, akkor szivárvány van, kivéve ha éppen dél van.

c) Ha várakozás nélkül kapok reggelit, akkor – föltéve, hogy nem alszom el – nyolc órára megérkezem.

d) Ha elalszom, nem kapok várakozás nélkül reggelit.

e) Ha nem alszom el, akkor reggelit is várakozás nélkül kapok, és meg is érkezem nyolc órára.

f) Abban az esetben indítható eljárás parlamenti képviselő ellen, ha ehhez a parlament is hozzájárul.

g) Amennyiben a szomszédok tanúvallomása helytálló, úgy a gyanúsított a tettes.

h) A tanítás nem ér véget délben, pedig ünnepély vagy osztályfőnöki óra lesz.

i) Ha a szemtanú megbízható, és az írásszakértő véleménye helytálló, úgy a bűncselekményt akkor és csak akkor követték el előre megfontolt szándékkal, ha a talált ujjlenyomatok a tettestől vagy esetleges bűntársától származnak.

j) Ha a szemtanú megbízható, az írásszakértő véleménye helytálló, és a talált ujjlenyomatok a tettestől származnak, akkor a bűncselekményt előre megfontolt szándékkal követték el.

6. VÁLTOZÓK ÉS KVANTOROK

6.1. VÁLTOZÓK ÉS NYITOTT MONDATOK

Az igazságfunktorok vizsgálata során jó hasznát vettük annak, hogy a funktorok argumentumhelyeit nem kipontozással, hanem *mondatparaméterekkel* való kitöltéssel jelöltük. E nélkül aligha tudtuk volna világosan megmondani például azt, hogy a "$p \equiv q$" bikondicionális a következő összetett formát rövidíti:

(1) $(p \supset q) \,\&\, (q \supset p)$.

Ha itt az argumentumhelyeket csupán kipontozással jelölnénk, ezt kapnánk:

(1′) $(\ldots \supset \ldots) \,\&\, (\ldots \supset \ldots)$.

Ez pedig, látszólag, négybemenetű funktor, holott a bikondicionálist kétbemenetű funktorként akarjuk értelmezni, vagyis azt óhajtjuk, hogy (1′)-ben az első és a negyedik helyen azonos argumentum szerepeljen, és a második és a harmadik helyre ugyancsak azonos argumentumok kerüljenek. Ezt teszi világossá az (1) alatti jelölés.

Általánosan fogalmazva: bármely többargumentumú funktorból új funktort képezhetünk, ha előírjuk, hogy két vagy több argumentumhelyet mindig azonos argumentummal kell kitölteni. Egy ilyen előírást úgy tudunk világosan és tömören közölni, ha a bemeneti helyeket kitöltjük alkalmasan választott jelekkel, paraméterekkel.

Ezt az eljárást a predikátumokra is ki kell terjesztenünk. Ennek megfelelően bevezetjük a *névparamétereket,* amelyek természetesen a nevekkel kitölthető argumentumhelyekre kerülhetnek. E célra az *a, b, c* betűket és indexezett változataikat fogjuk használni.

Mivel az egyedi dolgokra *névmásokkal* is utalhatunk, a névvel kitölthető helyek feltüntetésére egy másik lehetőség is kínálkozik: írjunk e helyekre névmásokat. Ennek az eljárásnak az előnyeit csak kissé később tudjuk megmagyarázni. A természetes nyelv névmásai helyett azonban műnévmásokat fogunk használni. E műnévmásokat – nem valami találó módon – *változók*nak nevezzük. (Az elnevezés a matematikai szaknyelvből ered.) Változókként az

x, y, z

betűket és számindexekkel ellátott változataikat fogjuk használni. Pontosabban: e jeleket *individuumváltozóknak* kellene neveznünk (mert egyedi dolgokra utalunk segítségükkel), de a megkülönböztető jelzőt elhagyjuk. A változók használatának egyik előnye a természetes nyelvi névmásokkal szemben, hogy a változókból korlátlan készlet áll rendelkezésünkre.

Változóink minden olyan helyen előfordulhatnak, ahol nevek jogosan szerepelhetnek. De majd látni fogjuk, hogy bizonyos pozíciókban *csak változók* szerepelhetnek, nevek nem. Ez az alapvető oka annak, hogy a névparaméterek mellett az individuumváltozókat is bevezetjük.

A névmásokat tartalmazó kifejezésekről már elmondtuk, hogy faktuális értékük meghatározásához a névmásokat *értékelnünk* kell, azaz meg kell határoznunk jelöletüket. Ezt a megállapítást azonban kissé pontosítanunk kell. Tekintsük ugyanis a következő mondatot:

A lány megcsókolta a fiút, aki szerette őt.

E mondat legtermészetesebb interpretációja szerint a mondatvégi 'ő' névmás a mondat elején szereplő 'a lány' leírásra utal vissza, tehát nem kell, sőt nem szabad értékelni, hanem azt kell biztosítani (a logikai szerkezet feltárásakor), hogy a névmás és a leírás jelölete azonos legyen.

E jelenség figyelembevételével megkülönböztetjük a névmások *szabad és kötött* előfordulásait. Egy névmás valamely előfordulását egy kifejezésben (például mondatban) akkor mondjuk *kötött*nek, ha egy másik kifejezésre utal vissza (esetleg előre), és ezért nem szabad tetszőlegesen értékelni. Egy névmás nem kötött előfordulását (valamely kifejezésben) *szabad* előfordulásnak mondjuk. Csak a szabad előfordulású névmásokat lehet tetszőlegesen értékelni.

Mivel a változók műnévmások, az iménti meghatározást rájuk is kiterjesztjük. A logikai grammatika pontos szabályokat ad arra nézve, hogy hogyan lehet a változókat „lekötni", azaz a kötött előfordulásokat létrehozni. Ideiglenesen elég lesz ennyi: egy kifejezésben azok a változó előfordulások szabadok, amelyek helyén nevek is szerepelhetnének.

A szabad előfordulású változó(ka)t vagy névmás(oka)t tartalmazó kifejezéseket *nyitott* kifejezéseknek mondjuk, a többieket pedig (tehát amelyekben nincs szabad előfordulású változó vagy névmás) *zárt*aknak. Minden kategóriában megkülönböztethetjük a nyitott és a zárt kifejezéseket; leggyakrabban azonban a nyitott és a zárt *mondatok*kal lesz dolgunk.

A továbbiakban nem emlegetjük külön a (természetes nyelvi) névmásokat, hanem csak a változókat. Egy kifejezésben egy változó több helyen is előfordulhat, szabadon is, kötötten is.

Egy nyitott kifejezést *n-változós*nak mondunk, ha benne *n különböző* változónak van szabad előfordulása ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Így például

(x_1 megcsókolta x_2-t) & (y_1 szerette y_2-t)

négyváltozós, viszont

(x megcsókolta y-t) & (y szerette x-et)

kétváltozós nyitott mondat.

Mint e példánkból láthatjuk, *az igazságfunktorok alkalmazását a nyitott mondatokra is kiterjesztjük.*

Előfordul, hogy a természetes nyelvi kötött névmások nem látják el egyértelműen a visszautaló funkciójukat. Ezt illusztrálja a következő mondat:

(2) Egy hivatalnoknak megsúgta egy jóakarója, hogy van *neki* egy beosztottja, aki sokkal több hatalommal rendelkezik, mint az *ő* felettesei.

A 'neki' és az 'ő' névmások nem látják el kielégítően visszautaló funkciójukat, hiszen a visszautalások homályossága folytán (2) a megértést lehetetlenné tevő módon többértelmű. Nem világos, hogy *kinek* a beosztottjáról (a hivatalnokéról vagy a jóakaróéról) és kinek a feletteseiről van benne szó. (Lehet, hogy a felettes a hivatalnoké, lehet, hogy a jóakaróé, lehet, hogy a beosztotté.) Műnévmásokat, azaz változókat használva, a (2) mondat hatféle módon egyértelműsíthető:

(2.1) Egy x hivatalnoknak megsúgta egy y jóakarója, hogy van x-nek egy z beosztottja, aki sokkal nagyobb hatalommal rendelkezik, mint x felettesei.

(2.2) Egy x hivatalnoknak megsúgta egy y jóakarója, hogy van y-nak egy z beosztottja, aki sokkal nagyobb hatalommal rendelkezik, mint x felettesei.

(2.3) Egy x hivatalnoknak megsúgta egy y jóakarója, hogy van x-nek egy z beosztottja, aki sokkal nagyobb hatalommal rendelkezik, mint y felettesei.

(2.4) Egy x hivatalnoknak megsúgta egy y jóakarója, hogy van y-nak egy z beosztottja, aki sokkal nagyobb hatalommal rendelkezik, mint y felettesei.

(2.5) Egy x hivatalnoknak megsúgta egy y jóakarója, hogy van x-nek egy z beosztottja, aki sokkal nagyobb hatalommal rendelkezik, mint z felettesei.

(2.6) Egy x hivatalnoknak megsúgta egy y jóakarója, hogy van y-nak egy z beosztottja, aki sokkal nagyobb hatalommal rendelkezik, mint z felettesei.

Azt, hogy az x változó mindenütt az 'egy hivatalnok'-ra utaljon vissza, úgy tettük egyértelművé, hogy az eredeti kifejezést 'egy x hivatalnok'-ra módosítot-

tuk. Analóg módon lett az 'egy jóakarójá'-ból 'egy *y* jóakarója', és az 'egy beosztottjá'-ból 'egy *z* beosztottja'. A (2.1), ..., (2.6) mondatokban az *x, y, z* változók előfordulásai mind kötöttek.

Azt, hogy a szabad változók (illetve névmások) értékelése nélkül nincs információtartalmuk a nyitott mondatoknak, mulatságosan illusztrálja Lewis Carrol egy versikéje, amelyet (az angolul tudók kedvéért) eredetiben is idézünk. Kiemeltük a névmásokat, és a magyar fordításban (Kosztolányi Dezső műve) még a rejtett névmásokra utaló személyragokat is.

Úgy hall*om*, járt *ön nála* még,	*They* told *me you* had been to *her*
S beszél*tek rólam ott,*	and mentioned *me* to *him*
Azt mond*ta*, kedvel voltaképp,	*She* gave *me* a good character
Bár úszni nem tud*ok.*	but said *I* could not swim.
Nem men*tem*, s megsúg*ták nekik*	He sent *them* word *I* had not gone
– valóban *így* van *ez*,	(*We* know *it* to be true)
Viszont ha *ő* erőlteti,	If *she* should push the matter
akkor *önnel* mi lesz?	What would become of *you*?

Minthogy a szövegkörnyezet semmiféle további felvilágosítással nem szolgál, jogosnak tűnik Alice felkiáltása: „– Nincs ennek egy szikrányi értelme sem!"

Nyitott mondatra egyszerű példát kapunk, ha egy neveket tartalmazó (zárt) mondatban a neveket változókkal helyettesítjük:

(3) Kecskemét és Cegléd között van Nagykőrös.

(3.1) *x* és *y* között van *z*.

Látjuk, hogy a (3)-beli háromargumentumú predikátumot a (3.1) alatti nyitott mondattal világosabban megadhatjuk, mint ha kipontozással jelölnénk az argumentumhelyeket (ahogyan korábban tettük).

(4) Micimackó mézéhes medve, és Malacka szereti őt.

E mondat logikai szerkezetét világosabbá teszi a következő átfogalmazás:

(4.1) (Micimackó mézéhes) & (Micimackó medve) & (Malacka szereti Micimackót).

Ha itt a neveket csupán kipontozással helyettesítenénk, ezt kapnánk:

(4.2) (... mézéhes) & (... medve) & (... szereti ... -t).

De (4.1)-ben az első, a második és a negyedik argumentumhelyen egyazon név ('Micimackó') szerepel. Azonos neveket azonos változókkal helyettesítve, (4.1)-ből a következő nyitott mondatot kapjuk:

(4.3) (x mézéhes) & (x medve) & (y szereti x-et).

Ez *kétváltozós* nyitott mondat, míg (4.2) egy négyargúmentumú predikátumot ábrázol. Látjuk, hogy összetettebb predikátumok megadására a változókat tartalmazó nyitott mondatok a legalkalmasabbak. Bármely n-változós nyitott mondat egy n-argumentumú predikátum kifejezőjének tekinthető (n = 1, 2, 3, ...).

Azonban a nyitott mondatok is a *mondat* kategóriájába tartoznak, tehát nem predikátumok. Ha nem akarjuk összekeverni a grammatikai kategóriákat, akkor a nyitott mondatokat meg kell különböztetnünk a predikátumoktól abban az esetben is, amikor – az egyértelműség miatt – nyitott mondattal kell kifejeznünk egy predikátumot.

A predikátum megkülönböztetése a nyitott mondattól olyan logikai eljárást igényel, amellyel előállítjuk és egyértelművé tesszük, hogy az adott predikátumnak hány kitöltésre váró helye van. Ezt a helyzetet egy úgynevezett absztrakciós operátor (λ/lambda/ operátor) használatával érhetnénk el. Jelen könyvünkben azonban ezt a technikát nem alkalmazzuk. Ha predikátumról akarunk beszélni nyitott mondat helyett, akkor a predikátumra *F, G, H*... stb. nagybetűkkel utalunk. Ha szükségünk van az adott predikátum szerkezetére, akkor azt a neki megfelelő nyitott mondattal tárjuk fel.

6.2. KVANTOROK

A logika grammatikájában speciális szimbólumokat használunk a változók lekötésére. E jeleket (változót lekötő) *operátorok*nak mondjuk. Használati módjuk a következő. Az operátort közvetlenül követnie kell egy változónak, amelyet *az operátor változójának* mondunk, majd egy zárójellel közrefogott kifejezésnek, amelyet az *operátor hatókör*eként emlegetünk. A hatókör általában olyan *nyitott* kifejezés, amelyben az operátor változójának van *szabad* előfordulása. Az operátor egyik funkciója éppen e szabad változó lekötése. Az operátor alkalmazásaként kapott összetett kifejezésben az operátor változójának összes előfordulása már kötöttnek számít: nem helyettesíthető be névvel. Az operátorok alkalmazásának általános sémája tehát a következő:

(7) operátor – változó – (hatókör).

Természetesen ez csak grammatikai séma, amely semmit sem mond az operátor

alkalmazásának *értelméről.* Nem is mondhat, hiszen ez az értelem operátoronként más és más lehet.

A klasszikus elsőrendű logikában két (változót lekötő) operátort használunk. Ezek kizárólag *nyitott mondatokra* alkalmazhatók, és az alkalmazás eredményeként nyitott vagy zárt mondatot kapunk, amelyben a szabad változók száma eggyel csökken az operátor hatóköréhez képest. Egyváltozós nyitott mondatra alkalmazva őket, zárt mondatot kapunk eredményül. E két operátor jele:

'∀' és '∃'.

Elnevezésük rendre: *univerzális kvantor, egzisztenciális kvantor. (Univerzális – általános, egzisztenciális – létezési. A* 'kvantor' kb. mint 'mennyiségelő' adható vissza magyarul, de az utóbbi használatát nem ajánljuk.) Mondhatjuk őket *általános,* illetve *létezési* kvantornak is. Alkalmazásuk sémája ugyanaz, mint (7) alatt, azaz:

(8) kvantor – változó – (hatókör),

azzal, hogy hatókörként csak *nyitott mondat* szerepelhet, és természetesen a kvantor változója mindig a hatókör egyik szabad változójával azonos.

A kvantorok alkalmazását a nyitott mondatokra *kvantifikációnak* mondjuk. A kvantorokhoz – némileg mesterkélt – természetes nyelvi kiolvasási formákat rendelhetünk:

'$\forall x$' kiolvasása: 'minden x-re' vagy 'minden x-re áll, hogy'.
'$\exists x$' kiolvasása: 'van olyan x, hogy'.

Természetesen x szerepében bármely változóval. A kiolvasási formák összhangban vannak az elnevezésekkel.

Alkalmazásuk illusztrálását egyváltozós nyitott mondatokkal kezdjük:

(9) (x ember) $\supset$ (x-nek van barátja),

(10) y barátja Péternek.

Alkalmazzunk az elsőre univerzális, a másodikra pedig egzisztenciális kvantifikációt:

(9.1) $\forall x$ [(x ember) $\supset$ (x-nek van barátja)].

(10.1) $\exists y$ [y barátja Péternek].

Az elsőt így olvashatjuk ki:

(9.2) Minden x-re: ha x ember, x-nek van barátja.

Kézenfekvő ezt így érteni: Bármilyen dologra utaljon is az *x* változó, ha emberre utal, akkor olyanra utal, akinek van barátja. Azaz, (9.1) azt akarja kifejezni, hogy a (9) nyitott mondat *az x változó bármely értékelése mellett igaz*. Ha a kötött *x* változó helyett természetes nyelvi névmásokat használunk, (9.2)-t így fogalmazhatjuk át:

Minden, ami ember, annak van barátja:

Ezt pedig még tömörebben így mondhatjuk magyarul:

(9.3) *Minden* embernek van barátja.

A (9.1) alatti mondatot a (9.3) mondat logikai szinonimájának tekintjük. Látjuk, (9.3)-ban sem változó, sem névmás nem szerepel, s ez világossá teszi, hogy (9.1) valóban zárt mondat. A kvantifikált zárt mondatok, ha nem túl bonyolultak, a természetes nyelvben változók használata nélkül is kifejezhetők. Viszont (9.1) előnye (9.3)-hoz képest az, hogy pontosan feltárja a logikai szerkezetet: megmutatja az 'ember' és a '...-nek van barátja' predikátumok szerepét az összetett mondatban, és leleplezi a benne rejlő kondicionálist, amelyre (9.3)-ban semmiféle grammatikai jel nem utal. Sejthető, hogy ez a következtetések szempontjából alapvető jelentőségű.

Térjünk rá (10.1)-re. Ennek kiolvasása:

(10.2) Van olyan *y*, hogy *y* barátja Péternek.

Ezt így értjük: az *y* változót lehet úgy értékelni, hogy a (10) nyitott mondat igaz legyen: van olyan „dolog", amely barátja Péternek. Ezt pedig magyarul tömören így mondjuk:

(10.3) Péternek *van* barátja.

E mondat logikai szinonimája (10.1), amely föltárja a logikai szerkezetet, kimutatja benne a 'barátja' predikátum szerepét.

Példáinkból látjuk, hogy '∀' a 'minden', '∃' pedig a 'van' logikai szimbóluma, s ez motiválja az *univerzális,* illetve az *egzisztenciális* jelzőket az elnevezésükben. A kvantorok természetesen *logikai jelek,* s ennek alapján a 'minden' és a 'van' szavak – bizonyos előfordulásaikban – *logikai* szavakként funkcionálnak.

Helyettesítsük (10.3)-ban a 'Péter' nevet az *x* változóval:

(11) *x*-nek van barátja.

Mivel (10.3) logikai szerkezetét (10.1) fejezi ki, nyilvánvaló, hogy (11) logikai szerkezete a következő:

(11.1) $\exists y$ [y barátja x-nek].

Ez egyváltozós nyitott mondat, benne x szabad, y pedig kötött változó. Vegyük észre, hogy (9.1)-ben alkatrészként szerepel (11). Helyettesítsük hát (9.1)-ben (11)-et a logikai szerkezetét pontosan kifejező (11.1) kifejezéssel. Az eredmény:

(9.4) $\forall x$ [(x ember) $\supset \exists y$ (y barátja x-nek)].

Ez az, ami teljes részletességgel feltárja a

(9.3) Minden embernek van barátja

állítás logikai szerkezetét, míg (9.1) ezt csak részlegesen, „első nekifutásra" adja vissza. A 'van' jelenléte (9.3)-ban persze sejteti, hogy a mondatban valahol még egy egzisztenciális kvantifikáció is rejtőzik.

Ha a kvantor változója helyére *nevet* tennénk, értelmetlen kifejezést kapnánk. (Hogyan hangzana például 'minden x-re' helyett ez: 'minden Atlanti-óceánra'; vagy 'van olyan x, hogy' helyett ez: 'van olyan III. Napóleon császár, hogy'?) A kvantorok (és általánosan az operátorok) használata elkerülhetetlenné teszi a *változók* használatát. *Kötött* változók helyett nem használhatnánk névparamétereket. Ezért volt szükséges az utóbbiak mellett a változók bevezetése is.

A kvantor hatókörét közrefogó zárójeleket néha elhagyjuk, ha ez nem vezet félreértésre. Ilyenkor a kvantor változója és hatóköre közé egy pontot iktatunk be tagolójelként, például "$\forall x.A$", "$\exists x.A$"; ahol 'A' reprezentálja a hatókört.

A 6.1 szakaszban a (2) alatti mondatban az 'egy' határozatlan névelő is egzisztenciális kvantifikációként fogható föl, például 'egy hivatalnok' hozzávetőleg így érthető: 'Van olyan x, hogy x hivatalnok, és...'. Ennek figyelembevételével (2) logikai szerkezete a következő:

(2′) $\exists x. \exists y$ [(x hivatalnok) & (x-nek jóakarója y) &
(y megsúgta x-nek, hogy ...)].

A 'hogy' utáni rész – mint tudjuk – nem egyértelmű. Ha például (2.2) szerint egyértelműsítjük, a kipontozott helyre a következő kétváltozós nyitott mondat kerül:

$\exists z$ [(z beosztottja y-nak) & (z sokkal nagyobb hatalommal rendelkezik, mint x felettesei)].

Persze, a 'megsúgta' kulcsszóval jellemezhető predikátum a harmadik argumentuma szerint intenzionális (ennek helyét jelöltük ki (2′)-ben kipontozással, ide kerülhet például az iménti nyitott mondat); így ez a példa az extenzionális logikán kívül esik.

6.3. A KVANTIFIKÁCIÓ IGAZSÁGFÖLTÉTELE

Jelöljön '$F(x)$' tetszőleges – esetleg többváltozós – nyitott mondatot, amelyben az x változónak van szabad előfordulása (ahogyan a jelölés sugalmazza). Ahhoz, hogy $F(x)$-nek szemantikai értéke legyen, a mondatot interpretálnunk és szabad változóit értékelnünk kell. Ehhez meg kell adnunk egy *tárgyalási univerzumot* (tetszőleges nemüres halmazt) is, melyet a továbbiakban U-val jelölünk. Megadjuk most azt a szabályt, amely lehetővé teszi "$\forall x.F(x)$" és "$\exists x.F(x)$" igazságértékének kiszámítását, feltéve hogy $F(x)$ igazságértékét már ismerjük az x változó minden megengedett értékelése mellett. *Megengedett* értékelésen azt értjük, hogy x értéke csak U valamely eleme lehet. Mivel a kvantifikált "$\forall x.F(x)$" és "$\exists x.F(x)$" mondatokban x-nek már nincs szabad előfordulása, e kvantifikált mondatok *értékelésébe* nem számít bele x értékelése. De ha $F(x)$-ben az x-en kívül más szabad változók is vannak, ezek értékelése természetesen beleszámít.

Emlékeztetőül: egy (kvantifikált) mondatot *interpretálni* annyi mint:

(a) kijelölni az U tárgyalási univerzumot,

(b) megadni a mondat logikai szerkezetében szereplő predikátumok terjedelmét (U-ra korlátozva), a nevek jelöletét (U-n belül) és az esetleges felbontatlan zárt részmondatok igazságértékét.

A mondat *értékelése* ezt követően pedig nem más, mint szabad változói jelöletének megadása, természetesen U-n belül. Világos, hogy egy interpretációhoz számos (esetleg számtalan sok) különböző értékelés csatlakozhat.

A kvantifikált mondatok igazságszabályai a következők:

Adott interpretáció és értékelés mellett "$\exists x.F(x)$" akkor és csak akkor igaz, ha az x változót lehet úgy értékelni, hogy $F(x)$ igaz legyen (az interpretációt és a többi változó értékelését változatlanul tartva).

Adott interpretáció és értékelés mellett "$\forall x.F(x)$" akkor és csak akkor hamis, ha az x változót lehet úgy értékelni (az interpretációt és a többi változó értékelését megtartva), hogy $F(x)$ hamis legyen. (Másképp: "$\forall x.F(x)$" akkor és csak akkor igaz, ha $F(x)$ az x minden értékelése mellett igaz.)

E szabályok mutatják, hogy az univerzális kvantor ezt jelenti: „a tárgyalási univerzum *minden* elemére", az egzisztenciális kvantor pedig ezt: „a tárgyalási univerzumnak legalább egy elemére". Szabályaink helyesen pontosítják a 'minden' és a 'van' szavaink jelentését.

Emlékezve a konjunkció és az alternáció *dualitására* (5.5. szakasz), a fenti definíciókból látható, hogy az egzisztenciális és az univerzális kvantifikáció *duális operációk*, egymás duálisai. Bizonyos értelemben az univerzális kvantifikáció a konjunkció általánosítása, az egzisztenciális kvantifikáció pedig az alternációé. Nevezetesen: ha az U tárgyalási univerzum csak véges számú elemet tartalmaz, melyeket az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nevekkel jelölünk, akkor:

$$\forall x.F(x) \Leftrightarrow [F(a_1) \;\&\; F(a_2) \;\&\ldots\; \& \; F(a_n)],$$

$$\exists x.F(x) \Leftrightarrow [F(a_1) \vee F(a_2) \vee \ldots \vee F(a_n)];$$

ahol $F(a_i)$ természetesen úgy keletkezik $F(x)$-ből, hogy x szabad előfordulásait a_i-vel helyettesítjük ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Mivel $F(x)$-et akkor és csak akkor lehet igazra értékelni, ha "$\sim F(x)$"-et lehet hamisra értékelni, azért "$\exists x.F(x)$" igazságának feltétele ugyanaz, mint "$\forall x.F(x)$" hamisságának – azaz mint "$\sim \forall x. \sim F(x)$" igazságának – feltétele. Tehát:

(T33.1) $\exists x.F(x) \Leftrightarrow \sim \forall x. \sim F(x)$.

Írjunk itt $F(x)$ helyére "$\sim F(x)$"-et, s a jobb oldalon töröljük a kettős negációjelet:

(T34.1) $\exists x. \sim F(x) \Leftrightarrow \sim \forall x. F(x)$.

Mindkét oldalt negálva, s a jobb oldalon '$\sim \sim$'-t törölve:

(T33.2) $\sim \exists x. \sim F(x) \Leftrightarrow \forall x.F(x)$.

Végül, ha (T33.1)-ben mindkét oldalt negáljuk, s a jobb oldalon töröljük a '$\sim \sim$', ezt kapjuk:

(T34.2) $\sim \exists x.F(x) \Leftrightarrow \forall x. \sim F(x)$.

E négy törvény közül (T33.1) és (T33.2) mutatja, hogy hogyan fejezhető ki az egyik kvantor a másikkal plusz negációval. Továbbá (T34.1) és (T34.2) mutatja, hogy a negált kvantifikáció hogyan fejezhető ki másképp: univerzális kvantifikáció negációja logikailag ekvivalens a negált hatókör egzisztenciális kvantifikációjával; egzisztenciális kvantifikáció negációja pedig a negált hatókör univerzális kvantifikációjával. (Közös kulcs: a negációjel „beljebb" megy a kvantor hatókörére, s a kvantor „cserélődik", '$\forall$'-ból '$\exists$' lesz, illetve fordítva.) Ezek a *kvantifikációs De Morgan-törvények.*

Megjegyzések

(a) Változókat és változót lekötő operátorokat bármely grammatikai kategóriában bevezethetünk. A klasszikus elsőrendű logika nevében az 'elsőrendű' jelző éppen arra vonatkozik, hogy csak a *név* kategóriájában használunk operátorral leköthető változókat. „Magasabb rendű" logikai elméletet úgy nyerhetünk, ha más kategóriákban (például a predikátumok, a mondatok, a névfunktorok stb. kategóriáiban) is bevezetünk operátorral leköthető változókat. Az extenzionális logika *teljes* elméletét pedig nyilván úgy kapjuk meg, ha minden lehetséges kategóriában használunk változókat és operátorokat.

(b) A paraméterek – például a mondatparaméterek – *kívülről tekintve* ugyancsak változóknak tűnnek, hiszen ha mondunk róluk valamit, úgy értjük, hogy az a paraméterek minden megengedett helyettesítésére vonatkozik. Mondhatjuk, itt *metanyelvi* (többnyire

univerzális) kvantifikációról van szó, melynek tárgyalási univerzumába nyelvi kifejezések – s nem a nyelven kívüli világ tárgyai tartoznak. A paraméterek tehát a logika tudományába tartozó állítások kifejezéséhez szükségesek, nem pedig *tetszőleges* állítások logikai szerkezetének föltárásához. *Belülről nézve,* azaz a logikai grammatikában, a paraméterek és a változók között az a különbség, hogy az utóbbiak kvantifikálhatók, az előbbiek nem. A paraméterek csak jelképeznek bizonyos kifejezéseket, s ilyenekkel szabadon behelyettesíthetők. A kötött változók viszont behelyettesíthetetlenek.

(c) A kvantifikációt kiterjeszthetjük olyan mondatokra is, amelyekben a kvantifikált változónak nincs szabad előfordulása, éspedig a következő megállapodással: *Ha a (nyitott vagy zárt) p mondatban az x változó nem fordul elő szabadon, akkor* "$\forall x.p$" és "$\exists x.p$" *jelentse ugyanazt, mint p.*

Ellenőrző kérdések

6.1. Miért van szükség műnévmások, azaz változók használatára?

6.2. Hogyan különböztetjük meg a szabad és a kötött előfordulású névmásokat a természetes nyelvi mondatokban?

6.3. Mi az operátorok szerepe a logika grammatikájában? Alkalmazásuk általános sémája?

6.4. Milyen kifejezésekre alkalmazhatók a kvantorok? Mit kapunk alkalmazásuk eredményeként? Hogyan olvassuk ki a kvantoros kifejezéseket?

6.5. Ismertesse a kvantifikáció igazságföltételét!

6.6. Hogyan fejezhetők ki a kvantorok egymással és negációval?

Gyakorló feladatok

6.1. Keressük ki az alábbi mondatokban a szabad és a kötött előfordulású névmásokat! Kötött névmás esetén mondjuk meg, hogy mely kifejezésre utal a mondatban!

a) Ő mondta neki, hogy ne maradjon itt.

b) A sintér elvitte a kutyát, amely megharapta őt.

c) Akinek vannak halai, eteti őket.

6.2. Az alábbi zárt mondatokból képezzünk nyitott mondatokat a neveknek változókkal való helyettesítése révén!

a) Micimackó meglátogatta Nyuszit.

b) Malackát Micimackó és Róbert Gida mentették meg.

c) Füles farkát Micimackó találta meg Bagoly ajtajánál.

d) Tigris könnyebben hazatalált, mint Micimackó és Nyuszi.

e) Dömdödöm verse jobban tetszett Mikkamakkának, mint Ló Szerafiné.

f) Péter vermet ás Pálnak, és Péter esik bele.

6.3. Jelöljük ki az alábbi mondatokban szereplő predikátumokat!

a) A Tisza a Dunába ömlik.

b) A Hold kering a Föld körül.

c) Amália pletykál Bellának Csabáról.

d) Mekkából Medinába futott Mohammed.

e) Albert várta Bertát az Emkénél.

f) Dávid hallotta Amáliát Csabáról mesélni Bellának.

6.4. Fogalmazzuk át az alábbi állításokat úgy, hogy a kvantorok közvetlenül kifejezésre kerüljenek! Használjunk kvantifikált változókat is!

a) Júliát mindenki szereti.

b) Júlia mindenkit szeret.

c) Júlia szeret valakit.

d) Valaki szereti Júliát.

e) Mindenki szeret valakit.

f) Mindenki szeret mindenkit.

g) Mindenki szereti önmagát.

6.5. Az alábbi nyitott mondatokban jelöljük ki a kvantorokat és hatókörüket (új változók bevezetésével):

a) x mindenkinél okosabb.

b) y jár valakivel.

c) z lát valamit, de y mindent lát.

d) x mindent megvesz y-nak.

7. UNIVERZÁLIS ÉS EGZISZTENCIAÁLLÍTÁSOK

7.1. AZ EGZISZTENCIÁLIS KVANTIFIKÁCIÓ FELISMERÉSE

Egyváltozós nyitott mondatra egzisztenciális kvantifikációt alkalmazva, a nyert mondat *egzisztenciaállítást* fejez ki. Az egzisztenciaállítások általános sémája tehát:

(1) $\exists x.F(x)$,

ahol $F(x)$ egyváltozós nyitott mondatot ábrázol.

Ritka eset, hogy az egzisztenciális kvantor hatóköre olyan nyitott mondat, melyben egyetlen primitív (felbonthatatlan) predikátum szerepel. Ritkán használunk ilyen mondatokat:

Van oroszlán; Van üstökös; Van páros szám;

bár többes számban már inkább előfordulnak

Vannak oroszlánok; Vannak üstökösök; Vannak páros számok.

Kérdés, hogy ezek a többes számú mondatok többet mondanak-e, mint egyes számú változataik. Mindenesetre, akár egyes, akár többes számban fogalmazunk, a mondanivaló lényege az, hogy egy bizonyos predikátum terjedelme *nem üres.* Ha az állításból csak ennyit akarunk kihasználni, akkor a többes számot nem szükséges figyelembe venni; így a 'Vannak páros számok' állítás logikai szerkezete így fejezhető ki:

$\exists x$ (x páros szám).

A teljes igazság persze az, hogy a többes számú egzisztenciaállításból logikailag következik a megfelelő egyes számú állítás, de fordítva nem. 'Van páros törzsszám' igaz, de 'Vannak páros törzsszámok' hamis állítás, föltéve hogy a 'vannak'-ot úgy értjük, hogy *több mint egy van.* A többes számú egzisztenciaállítások logikai szerkezetének föltárásával a következő fejezetben foglalkozunk.

Az egzisztenciaállítások leggyakoribb típusa az alábbi sémát követi:

(2) Van olyan *F*, amely *G*,

ahol *F* és *G* egyargumentumú predikátumokat ábrázolnak. A predikátumokat ábrázoló betűket *predikátumparamétereknek* mondjuk; e célra az *F*, *G*, *H* betűket használjuk (szükség esetén indexezve).

Illusztráló példák:

(3) Van olyan emlős, amely repül.

(4) Van olyan gomba, amely mérgező.

(5) Van olyan diák, aki élsportoló.

(Az utolsó mondatban 'amely' helyett 'aki' szerepel, jelezvén hogy személyről van szó. A logikai szerkezetben ennek kimutatása többnyire lényegtelen.)

A (2) szerkezetű mondatok tartalma az, hogy van olyan *F* (tulajdonságú) dolog, amely egyben *G* (tulajdonságú) is. Másképp: van olyan dolog, amelyre mind az *F*, mind a *G* predikátum igaz. Tehát (2) logikai szerkezete:

(2′) $\exists x[F(x) \ \& \ G(x)]$.

(Itt "$F(x)$", sejthetően, azt jelzi, hogy az *F* predikátumot kitöltjük az *x* változóval mint argumentummal. Hasonlóan értendő "$G(x)$" is.) Mint látjuk, (2)-ben a vonatkozó névmás ('amely') mögött konjunkció rejtőzik. Konkretizálva például (3)-ra:

(3′) $\exists x$ (x emlős & x repül).

A (2) sémában *F* és *G* szerepében összetett predikátumok is előfordulhatnak. Gyakori speciális eset a következő:

(6) Van olyan *F*, amely nem *G*.

Ennek logikai szerkezete:

(6′) $\exists x[F(x) \ \& \ \sim G(x)]$.

Illusztráció:

Van olyan madár, amely nem repül.
$\exists x[x$ madár & $\sim$ (x repül)$]$.

Az egzisztenciális kvantorról világosan árulkodik a 'van' és a 'létezik' ige föllépése. A logikai szerkezet helyes visszaadásához mindig azt kell jól megfontolnunk, hogy milyen tulajdonságú dolog létezését állítjuk a mondatban. Az alábbi példákban a kiemelt szavak fejezik ki a létezést:

Péternek *van* barátja.
A Naprendszeren kívül is *léteznek* élőlények.
Fülesnek elnéző barátja is *akad*.
Tanulságos kudarc is *előfordul*.
A zsebemben *van* pénz.

Ezek közül az elsővel már az előző fejezetben találkoztunk. A többi példamondat logikai szerkezete:

$\exists x$(x élőlény & x kívül van a Naprendszeren).
$\exists x$(x barátja Fülesnek & x elnéző).
$\exists x$(x kudarc & x tanulságos).
$\exists x$(x pénz & x a zsebemben helyezkedik el).

Tekintsük most a

(7) Néhány F (az) G

sémát, például 'Néhány leány táncol'. Világos, hogy (7)-ből következik (2); ha néhány leány táncol, akkor van (legalább egy) olyan leány, aki táncol. A fordított irányú következtetés azonban gyanús: a 'néhány' többet jelent, mint az, hogy 'legalább egy'. Mennyivel többet? Legalább kettőt? Vagy legalább hármat? Mivel ez meglehetősen bizonytalan, a leghelyesebb, ha a (7) szerkezetű információ helyett (2)-t vesszük, mint (7) megbízható és egyértelmű következményét. (Ha mégis szükségünk van a (7)-ben rejlő többletre, a következő fejezet ad útbaigazítást ennek logikai kifejezésére.)

Ugyanígy kezelhetjük a következő szerkezeteket is:

Némely(ik) F (az) G.
Egyes F-ek G-k.

Illusztrációk:

Némelyik csacsi nagyképűségben szenved.
$\exists x$ (x csacsi & x nagyképűségben szenved).
Egyes jogszabályok nehezen értelmezhetőek.
$\exists x$ (x jogszabály & x nehezen értelmezhető).

A határozatlan névelő, továbbá a 'valami' és a 'valaki' is gyakran egzisztenciális kvantifikációra utal:

Amália tagja *egy* énekkarnak.
$\exists x$ (x énekkar & Amália tagja x-nek).
Péter talált valamit.
$\exists x$ (Péter talált x-et).
Bella vett *egy* nyakláncot.
$\exists x$ (x nyaklánc & Bella megvette x-et).
Júlia szeret *valakit.*
$\exists x$ (Júlia szereti x-et).
Júliát szereti *valaki.*
$\exists x$ (x szereti Júliát).

Ha az utolsó két példában azt is ki akarjuk fejezni, hogy a 'valaki' névmás személyre utal, akkor a kvantor hatókörét alkotó nyitott mondathoz konjunkcióval hozzá kell fűznünk az 'x személy' (vagy 'x ember') nyitott mondatot; például így:

$\exists x$ (x személy & Júlia szereti x-et).

Végül egy összetettebb példa:

(8) Csilla vett *valamit,* de elcserélte azt *valakivel valamire.*

Első nekifutásra a következő fő szerkezetet találjuk:

(8.1) $\exists x$ (Csilla megvette x-et & Csilla elcserélte x-et valakivel valamire).

A kvantor hatókörében a konjunkció második tagjában szereplő 'valaki' így hozható napfényre:

(8.2) $\exists y$ (y személy & Csilla elcserélte x-et y-nal valamire).

Mivel az x változót már elhasználtuk, itt y-t alkalmazzuk kvantifikációs változóként. A kvantor hatókörében a konjunkció második tagját átírjuk, hogy a 'valami'-t kiküszöböljük:

(8.3) $\exists z$ (Csilla elcserélte x-et y-nal z-re).

Összerakva az egészet, megkapjuk (8) logikai szerkezetét:

(8.4) $\exists x$ [Csilla megvette x-et & $\exists y$ (y személy & $\exists z$ [Csilla elcserélte x-et y-nal z-re])].

Az egzisztenciaállítások *negációjában* rendszerint föllép a 'nincs' szó, például

(9) Nincs olyan F, amely G.

Ez nyilvánvalóan a (2) alatti 'Van olyan F, amely G' negációja, tehát logikai szerkezete, (2') alapján, a következő:

(9.1) $\sim \exists x[F(x) \ \& \ G(x)]$.

Az előző fejezet (T33.2) törvénye alapján ez logikailag ekvivalens a következővel:

(9.2) $\forall x. \sim [F(x) \ \& \ G(x)]$.

Itt azonban "$\sim [F(x) \ \& \ G(x)]$" helyettesíthető "$F(x) \supset \sim G(x)$"-szel:

(9.3) $\forall x[F(x) \supset \sim G(x)]$.

(Magyarázzuk meg az utóbbi helyettesítés jogosságát!) Tehát (9) logikai szerkezetét a (9.1), (9.2), (9.3) sémák bármelyikével kifejezhetjük. Még jegyezzük meg, hogy (9) magyarul így is mondható:

(9.4) Egyetlen F sem G.

Érvényesek tehát a következők:

(10.1) Nincs olyan F, amely $G \Leftrightarrow$ Egyetlen F sem G.

(10.2) Egyetlen F sem $G \Leftrightarrow \sim \exists x[F(x) \ \& \ G(x)]$.

(T35) $\sim \exists x[F(x) \ \& \ G(x)] \Leftrightarrow \forall x[F(x) \supset \sim G(x)]$.

Például 'Nincs olyan diák, aki megbukott' annyi mint 'Egyetlen diák sem bukott meg'.

További példák egzisztenciaállítás negációjára:

A zsebemben *nincs* pénz.
$\sim \exists x$ (x pénz & x a zsebemben helyezkedik el).
Júlia *senkit sem* szeret.
$\sim \exists x$ (Júlia szereti x-et).

A (9) séma speciális esete:

(11) Nincs olyan F, amely nem G.

Ennek szerkezete, (9.1) alapján:

(11.1) $\sim \exists x[F(x) \,\&\, \sim G(x)]$.

De (T35) alapján – a kettős negáció jelét törölve –:

(T36) $\sim \exists x[F(x) \,\&\, \sim G(x)] \Leftrightarrow \forall x[F(x) \supset G(x)]$.

Úgy tűnik, itt a jobb oldal így olvasható: "Minden, ami *F*, az *G*". Például 'Nincs olyan ló, amely nem négylábú' szinonimnak tűnik azzal, hogy 'Minden ló négylábú'. De ezt a problémát a következő szakaszban vizsgáljuk meg tüzetesebben.

7.2. AZ UNIVERZÁLIS KVANTIFIKÁCIÓ FELISMERÉSE

Ha egyváltozós nyitott mondatra univerzális kvantifikációt alkalmazunk, az eredményt *univerzális állítás*nak mondjuk. Mint az egzisztenciaállítások esetén, itt is ritka, hogy a kvantor hatókörében egyetlen primitív predikátum szerepeljen. Ilyen mondat lehet a: 'Minden változik', 'Minden mulandó', vagy 'Mindenki elment', az utóbbi azonban már így részletezhető: 'Minden személy elment'.

Az univerzális állítás leggyakoribb típusa a következő:

(12) "Minden, ami *F*, az *G*", illetve: "Minden *F G*".

Ezek logikai szerkezete, első megközelítésben, így adható vissza:

(12.1) $\forall x$ [ha $F(x)$, $G(x)$].

Például a 'Minden tanuló felkészült' szerkezete:

$\forall x$ [ha x tanuló, x felkészült].

A kérdés az, hogy (12.1)-ben a 'ha' igazságfunktor-e, azaz helyettesíthető-e a kondicionális '$\supset$' jelével így:

(12.2) $\forall x[F(x) \supset G(x)]$.

Az előző szakasz végéről – lásd (T36) – tudjuk, hogy ez logikailag ekvivalens a

(11.1) $\sim \exists x[F(x) \,\&\, \sim G(x)]$

sémával, amely viszont a

(11) Nincs olyan *F*, amely nem *G*

típus logikai szerkezetét fejezi ki. A kérdés tehát az, hogy (11) és (12) szinonimák-e, igazságfeltételeik azonosak-e.

Az világos, hogy (12)-ből következik (11): *ha minden tanuló felkészült,* akkor *nincs olyan tanuló, aki nem készült fel.* De következik-e (11)-ből (12)? Amíg *F* helyén olyan predikátumokat szerepeltetünk, amelyek terjedelme nem üres, addig a válasz igenlő. Probléma akkor adódik, ha *F* helyére üres terjedelmű predikátum kerül. Ha nincs *F* (tulajdonságú dolog), akkor nincs olyan *F* sem, amely nem *G*, tehát ekkor (11) biztosan igaz; de igaz-e (12)? A kérdés végül is az, hogy beleértjük-e a "Minden *F G*" állításba azt, hogy van *F* [$\exists x.F(x)$]. Nos, vannak esetek, amikor nem értjük bele:

Minden gombát, amit a piacra hoznak, szakértővel kell ellenőriztetni.

Ennek az állításnak az igazságértékét nyilván nem befolyásolja az, hogy van-e olyan gomba, amelyet a piacra hoznak.

Minden látogatót szívesen fogadok

Ez sem lenne hamis attól, hogy nincsenek látogatók.

Minden idült alkoholista orvosi kezelésre szorul.

Ezt az állítást is elfogadhatjuk igaznak annak feltételezése nélkül, hogy (tárgyalási univerzumunkban) vannak idült alkoholisták.

E példák illusztrálják, hogy a (12) szerkezetű állítások minimális közös tartalma éppen az, amit (11) fejez ki. Lehet, hogy egyes személyek egyes esetekben "Minden *F G*"-be még azt is beleértik, hogy "Van(nak) *F*(-ek)"; de mert ez bizonytalan és esetleges, az állítások logikai elemzésében erre nem lehetünk tekintettel. Ha adott esetben "Minden *F G*"-vel együtt "$\exists x.F(x)$"-et is állítjuk, az utóbbit tekintsük önálló állításnak, azaz olyannak, amely nem következik pusztán az előbbiből. A következtetések jelentős részében használhatunk "Minden *F G*" alakú premisszákat anélkül, hogy "$\exists x.F(x)$" igazságértékének problémája fölvetődne.

Ezek szerint elismerjük (11) és (12) szinonimitását:

(13) Minden, ami *F*, az *G* $\Leftrightarrow$ Nincs olyan *F*, amely nem *G*.

Ennek következtében (12) logikai szerkezetét (12.2)-vel fejezzük ki:

(14) Minden, ami *F*, az *G* $\Leftrightarrow \forall x[F(x) \supset G(x)]$.

A "$\forall x\ [F(x) \supset G(x)]$" szerkezetű mondatot *általánosított kondicionálisnak* nevezhetjük, hiszen az "$F(x) \supset G(x)$" kondicionális *általánosítását* – az x változó minden megengedett értékére vonatkozó állítását – fejezi ki. Alkalmazhatjuk rá az *előtag – utótag* megkülönböztetést is; nyilván $F(x)$ az előtag, $G(x)$ az utótag.

Mint a feltételes állításokban, itt is előfordul néha, hogy az előtag hátra kerül; ekkor az előtag az *aki/ami* vonatkozó névmásról ismerhető föl. Például:

(15) Mindenki gyanús nekem, *aki* él. (Arany J.)
Minden elromlik, *ami* elromolhat. (Murphy törvényeiből.)

A sorrendet egyszerű átfogalmazással helyreállíthatjuk:

Mindenki, aki él, (az) gyanús nekem.
Minden, ami elromolhat, (az) el is romlik.

'Minden' helyett gyakran 'mindenki' szerepel. Ezt az esetet kétféle módon vezethetjük vissza a 'minden'-re.

(a) Ha egyéb adatainkkal nem ellenkezik, kiköthetjük, hogy a tárgyalási univerzumba csak személyek tartoznak. Ekkor a személyre utaló '-ki' morfémát figyelmen kívül hagyhatjuk, és például (15) szerkezetét így fejezhetjük ki:

$\forall x$ (x él $\supset x$ gyanús nekem).

Vagy például a 'Mindenkinek van barátja' szerkezete így alakul:

$\forall x.\exists y$ (y barátja x-nek).

(b) Ha az (a) megoldás nem alkalmazható, akkor a 'mindenki'-t így értelmezzük: 'minden személy' vagy 'minden ember'. Ebben az esetben (15) így alakul:

Minden személy, aki él, az gyanús nekem.

Logikai szerkezete:

$\forall x$ [(x személy & x él) $\supset x$ gyanús nekem),

hiszen 'x olyan személy, aki él' nem más, mint 'x személy & x él'.

Ha az előtag vonatkozó mellékmondat, a 'minden' olykor kimondatlan marad:

Aki másnak vermet ás, maga esik bele.
Amit Jancsi nem tanult meg, nem tudja azt János.

Ezekhez természetesen hozzáértjük a 'mindenki', illetve 'minden' előtétet.

Néha a határozatlan névelő is általánosítást fejez ki:

(16) Ha egy szám osztható 6-tal, 3-mal is osztható.

Ez a következő szerkezetet sugalmazza

(16.1) x 6-tal osztható szám $\supset$ x 3-mal osztható szám.

De (16)-ot úgy értjük, hogy (16.1) az x minden megengedett értékére igaz, tehát eléje kell fűznünk '$\forall x$'-et. – Hasonlóan értjük a következő mondatot is:

Ha egy test szabadon esik, egyenletesen gyorsul.

E mondatban a határozatlan névelőt a tartalom megváltozása nélkül helyettesíthetjük a 'valamely' vagy a 'bármely' névmással. Ha a határozatlan névelő a tartalom módosulása nélkül helyettesíthető a 'bármely' névmással, ez a biztos jele annak, hogy a mondat univerzális állítást fejez ki.

Az általánosság kifejezésére gyakran használják a határozott névelőt a főnévi előtagban, például:

A parabola kúpszelet. $\forall$

E mondatot lehet így interpretálni: 'Minden parabola kúpszelet.'

A szarvasmarha kérődző állat.

Ez is érthető így: 'Minden szarvasmarha kérődző állat.' Az általánosított kondicionálisként való értelmezés még valószínűbb a többes szám használata esetén:

A madarak tojásrakók.
A fiúk elmentek.

A határozott névelő azonban *leírás* kifejezésére is szolgálhat, és ezért csak az interpretáció dönthet arról, hogy például az

A kutya ugat

mondatban az 'a kutya' kifejezés névként funkcionál-e, vagy pedig a 'minden kutya' helyettesítőjeként szerepel.

Egy összetettebb példa:

Péter minden barátjának van gyermeke.

Ennek logikai szerkezete, első megközelítésben

$\forall x$ [x barátja Péternek $\supset$ x-nek van gyermeke].

Az 'x-nek van gyermeke' pedig nem más, mint

$\exists y$ (y gyermeke x-nek).

Összerakva:

(17) $\forall x$ [x barátja Péternek $\supset$ $\exists y$ (y gyermeke x-nek)].

7.3. A KVANTIFIKÁCIÓ FONTOSABB TÖRVÉNYEI

A (T14) kontrapozíció-törvény alapján:

(18) $F(x) \supset G(x) \Leftrightarrow \sim G(x) \supset \sim F(x)$.

Ha egy összetett mondatban (vagy mondatsémában) valamely részmondatot egy vele logikailag ekvivalens kifejezéssel helyettesítünk, az eredetivel logikailag ekvivalens mondatot kapunk. Így "$\forall x$ [$F(x) \supset G(x)$]"-ben a kvantifikáció hatókörét fölcserélhetjük (18) szerint:

(T37) $\forall x[F(x) \supset G(x)] \Leftrightarrow \forall x[\sim G(x) \supset \sim F(x)]$.

Ez a *kvantifikációs kontrapozíció-törvény.* Leggyakoribb alkalmazási formája:

(T38) $\forall x[F(x) \supset \sim G(x)] \Leftrightarrow \forall x[G(x) \supset \sim F(x)]$.

Már tudjuk – lásd (10.2) –, hogy itt a bal oldal az "Egyetlen F sem G" mondattípus logikai szerkezete. Érdemes (T38)-at ennek megfelelően is felírni:

(19) Egyetlen F sem G $\Leftrightarrow$ Egyetlen G sem F.

Alkalmazási példaként figyeljük meg a következő szerkezeti szinonimitást:

(20) Csak ami F, az G $\Leftrightarrow$ (Minden,) ami nem F, az nem G.

(Hasonlítsuk össze az 5.6. szakasz (20) alatti "csak akkor p, ha q" sémával!) Alakítsuk át a jobb oldalt (T37) szerint:

(21) Csak ami F, az $G \Leftrightarrow$ Minden, ami G, az F.

Nyilvánvaló, hogy

(22) Csak az G, ami $F \Leftrightarrow$ Csak ami F, az G,

és így (21) folytán:

(22.1) Csak az G, ami $F \Leftrightarrow$ Minden, ami G, az F.

Ennek folytán például

Csak ami lesz, az a virág (József A.)

logikai szerkezete a következő:

$\forall x$ (x virág $\supset x$ lesz).

'A versenyen csak jeles tanulók indulhatnak' annyi mint 'Csak az indulhat a versenyen, aki jeles tanuló', azaz:

$\forall x$ (x indulhat a versenyen $\supset x$ jeles tanuló).

(De ebből nem következik, hogy a jeles tanulók mind indulhatnak.)

Egy illusztráció (19)-hez

Egyetlen szigetelő sem fém $\Leftrightarrow$ Egyetlen fém sem szigetelő.

A (T17) láncszabály szerint:

$\{F(x) \supset G(x), G(x) \supset H(x)\} \Rightarrow F(x) \supset H(x)$.

Ez a következtetési séma az x változó bármely értékelése mellett érvényes. Ezért: Ha a premisszák az x *minden értékelése esetén* igazak, akkor a konklúzió is igaz az x minden értékelése mellett. De az, hogy egy nyitott mondat az x minden értékelése mellett igaz, éppen azt jelenti, hogy a nyitott mondat (x szerinti) univerzális kvantifikációja igaz. Tehát:

(T39) $\{\forall x[F(x) \supset G(x)], \forall x[G(x) \supset H(x)]\} \Rightarrow \forall x[F(x) \supset H(x)]$.

(Természetesen azzal a kikötéssel, hogy a kvantifikáció a premisszákban és a

konklúzióban egyazon tárgyalási univerzumra vonatkozik.) Ez a *kvantifikációs láncszabály.* Érdemes szövegesen is megfogalmazni:

{Minden F G, Minden G H} $\Rightarrow$ Minden F H.

A két premisszát a G predikátum kapcsolja össze, mely az első premisszában utótagként, a másodikban előtagként szerepel. Az összefüggést a következő láncdiagrammal szemléltethetjük:

$$F \smile G \smile H$$

$$\forall x\,[F(x) \supset G(x)] \qquad \forall x[G(x) \supset H(x)].$$

Hosszabb, kettőnél több szemből álló láncot is használhatunk következtetésre. Feltételek: Minden premissza általánosított kondicionális, és a premisszák legyenek úgy sorba rendezhetők, hogy a szomszédosak egyszerű láncot alkossanak: az első utótagja legyen azonos a második előtagjával:

$$F \smile G_1 \smile G_2 — \ldots — G_n \smile H.$$

Azaz, a premisszák legyenek: $\forall x[F(x) \supset G_1(x)]$, $\forall x[G_1(x) \supset G_2(x)]$, ..., $\forall x[G_n(x) \supset H(x)]$. Ezekből "$\forall x[F(x) \supset H(x)]$" következik.

A kondicionális utótagjára alkalmazott kvantifikáció kiterjeszthető a teljes kondicionálisra, föltéve hogy a kvantifikált változó nem szerepel szabadon az előtagban:

(T40) $p \supset \forall y.G(y) \Leftrightarrow \forall y[p \supset G(y)]$,

(T41) $p \supset \exists y.G(y) \Leftrightarrow \exists y[p \supset G(y)]$.

Hasonlítsuk össze (T40) két oldala *hamisságának* feltételeit:

"$p \supset \forall y.G(y)$" akkor hamis, ha p igaz és "$\forall y.G(y)$" hamis, azaz *ha p igaz, és y-t lehet úgy értékelni, hogy $G(y)$ hamis legyen.*

"$\forall y[p \supset G(y)]$" akkor hamis, ha y-t lehet úgy értékelni, hogy "$p \supset G(y)$" hamis legyen. De p-ben y-nak nincs szabad előfordulása, tehát az utóbbi lehetőség akkor áll fenn, *ha p igaz, és y-t lehet úgy értékelni, hogy $G(y)$ hamis legyen.*

Mint látjuk, a hamisságfeltételek egybeesnek, és így az igazságfeltételek is. Ezzel (T40) érvényességét igazoltuk. Hasonlóan igazolható (T41) is.

Alkalmazzunk (T41) mindkét oldalára univerzális kvantifikációt:

$$\forall x[p \supset \exists y.G(y)] \Leftrightarrow \forall x.\ \exists y[p \supset G(y)].$$

Az x változónak p-ben is, $G(y)$-ban is lehet szabad előfordulása. E törvény alkalmazásával például (17)-ben előre vihetjük az egzisztenciális kvantifikációt:

$\forall x.\exists y$ (x barátja Péternek $\supset y$ gyermeke x-nek).

Ha viszont a kondicionális *előtagja* kvantifikált, és a kvantifikált változó nem fordul elő szabadon az utótagban, akkor a kondicionális egészére *kvantorcserével* terjeszthető ki a kvantifikáció: '$\forall$'-t '$\exists$'-re kell cserélni, és viszont:

(42) $\forall x.F(x) \supset p \Leftrightarrow \exists x[F(x) \supset p]$,

(T43) $\exists x.F(x) \supset p \Leftrightarrow \forall x[F(x) \supset p]$.

egyetértek

Tekintsük ugyanis (T40) alábbi speciális esetét:

$\sim p \supset \forall x. \sim F(x) \Leftrightarrow \forall x[\sim p \supset \sim F(x)]$.

Alkalmazzunk kontraponálást mindkét oldalon, és vegyük figyelembe, hogy "$\sim\forall x\sim$" helyett "$\exists x$" írható. Ezzel megkapjuk (T43)-at. Hasonlóan nyerhetjük (T41)-ből (T42)-t.

A 'bármely', 'bárki' és egyéb változatai is univerzális kvantifikációt fejeznek ki:

Ezt a feladatot bármely elsőéves meg tudja oldani.
$\forall x$ (x elsőéves $\supset x$ meg tudja oldani ezt a feladatot).

Ha feltételes állítás *előtagjá*ban szerepel a 'bármely', akkor hatóköre *az utótagra is* kiterjed:

Ha bárki eljön, jutalmat kap.
$\forall x$ (x eljön $\supset x$ jutalmat kap).
Ha bárki eljön, meg fogok lepődni.
$\forall x$ (x eljön $\supset$ meg fogok lepődni).

Az utóbbi azonban, (T43) folytán, logikailag ekvivalens a következővel

$\exists x$ (x eljön) $\supset$ (meg fogok lepődni).

Ezzel szemben a 'Ha mindenki eljön, meg fogok lepődni' logikai szerkezete a következő:

$\forall x$ (x eljön) $\supset$ (meg fogok lepődni).

A konjunkció egyik tagjára alkalmazott egzisztenciális kvantifikáció kiterjeszthető a konjunkció egészére, föltéve hogy a másik tagban a kvantifikált változó nem fordul elő szabadon:

(T 44) $p \,\&\, \exists y.G(y) \Leftrightarrow \exists y[p \,\&\, G(y)]$.

Az olvasóra bízzuk annak ellenőrzését, hogy a két oldal igazságfeltételei egybeesnek. Mindkét oldalra alkalmazhatunk újabb egzisztenciális kvantifikációt:

$\exists x[p \,\&\, \exists y.G(y)] \Leftrightarrow \exists x.\exists y[p \,\&\, G(y)]$.

Az x változónak akár p-ben, akár $G(y)$-ban lehet szabad előfordulása. E törvény kétszeri alkalmazásával a (8.4) alatti mondatban az összes kvantor előrehozható:

$\exists x.\exists y.\exists z$ (Csilla megvette x-et & y személy & Csilla elcserélte x-et y-nal z-re).

Az egymást követő „egynemű" kvantorok sorrendje fölcserélhető:

(T45) $\forall x.\forall y.F(x, y) \Leftrightarrow \forall y.\forall x.F(x, y)$, és
$\exists x.\exists y.F(x, y) \Leftrightarrow \exists y.\exists x.F(x, y)$.

A különneműek sorrendje viszont lényeges: 'Mindenki szeret valakit' és 'Van valaki, akit mindenki szeret' nyilván különböző jelentésűek, bár az utóbbiból következik az előbbi, az alábbi általános séma szerint:

(T46) $\exists x.\forall y.F(x, y) \Rightarrow \forall y.\exists x.F(x, y)$.

Ugyanis a premissza azt mondja, hogy x-et lehet úgy értékelni, hogy $F(x, y)$ igaz legyen, bárhogyan értékeljük is y-t. Ebből folyik, hogy "$\exists x.F(x, y)$" igaz, bárhogyan értékeljük is y-t; de ez meg épp azt jelenti, hogy "$\forall y.\exists x.F(x, y)$" – azaz a konklúziónk – igaz.

A következő két törvény szinte magától értetődő:

(T47) $\forall x.F(x) \Rightarrow F(a)$;

(T48) $F(a) \Rightarrow \exists x.\, F(x)$.

Itt természetesen $F(a)$ úgy keletkezik $F(x)$-ből, hogy x szabad előfordulásait az a névvel helyettesítjük. E két törvény egymás utáni alkalmazásával nyerjük, hogy:

(T49) $\forall x.F(x) \Rightarrow \exists x.F(x)$.

Továbbá:

(T50) $\{\forall x[F(x) \supset G(x)], F(a)\} \Rightarrow G(a)$.

Ugyanis az első premisszából, (T47) alapján, "$F(a) \supset G(a)$"-ra következtethe-

tünk; de ebből és az "$F(a)$" második premisszánkból leválasztással nyerhetjük "$G(a)$"-t.

Az univerzális és az egzisztenciaállítások *legegyszerűbb* típusainak listája:

(12) Minden, ami F, az G. $\forall x[F(x) \supset G(x)]$.

(9.4) Egyetlen F sem G. $\forall x[F(x) \supset \sim G(x)]$.

(2) Van olyan F, amely G. $\exists x[F(x) \ \& \ G(x)]$.

(6) Van olyan F, amely nem G. $\exists x[F(x) \ \& \sim G(x)]$.

Ezek közül (12) és (6) egymás negációi, ahogyan ezt már (T36) és (13) alatt észrevettük. Továbbá (9.4) és (2) ugyancsak egymás negációi, (10.1) és (T35) szerint. E négy séma tehát *a negációra nézve zárt rendszert alkot* – bármelyikük negációja is szerepel a listán. Arisztotelész, a logika megalapozója, főleg e logikai szerkezetekkel foglalkozott. A középkorból származó elnevezés szerint ezek a *kategorikus állítások* típusai.

7.4. EGY KÖVETKEZTETÉSI PÉLDA

A kvantifikációra vonatkozó eddigi ismereteink alapján már ellenőrizhetjük azt a Lewis Carrolltól származó tízpremisszás következtetést, amelyet még az 1.2. szakaszban említettünk.

Szemügyre véve a tíz premisszát és a konklúziót, észrevehetjük, hogy mindegyikük *általánosított kondicionális,* vagy legalábbis azzá alakítható, ismert törvényeink alapján. Logikai szerkezetük feltárásának megkönnyítésére állapodjunk meg a következő egyszerűsítésekben:

(a) Mind a 11 állítás állatokról szól. Ezért az 'állat' predikátumot a logikai szerkezet feltárásakor figyelmen kívül hagyjuk. Például a 'Ha egy állatot utálok, akkor elkerülöm' premisszát így fogjuk föl: 'Amit utálok, azt elkerülöm.'

(b) A megmaradt predikátumokra a következő rövidítéseket vezetjük be:
Hb: e házbeli (állat); *Ho:* Holdra szeret bámulni; *Hu:* húsevő;
M: macska; *Ke:* kedvencnek alkalmas; *Kg:* kenguru;
Eg: egeret fog; *Ej:* éjjel jár zsákmány után;
El: elkerülöm; *V:* vonzódik hozzám; *Ut:* utálom.

(c) Az x változó egyhangú kiírását mellőzzük; tehát a "$\forall x[F(x) \supset G(x)]$" séma helyett tömören ezt írjuk: "$\forall(F \supset G)$".

Lássuk ezek után a 11 mondat logikai szerkezetét.

Premisszák:

1. Ebben a házban nincs más állat, csak macska. $\forall(Hb \supset M)$.

2. Minden állat alkalmas kedvencnek, amely szeret a Holdra bámulni. $\forall(Ho \supset Ke)$.

3. Ha egy állatot utálok, elkerülöm. $\forall(Ut \supset El)$.

4. Minden húsevő éjjel jár zsákmány után. $\forall(Hu \supset Ej)$.

5. Nincs olyan macska, amely nem fog egeret. $\forall(M \supset Eg)$.

6. Csak olyan állat vonzódik hozzám, amely e házbeli. $\forall(V \supset Hb)$.

7. Kenguruk nem alkalmasak kedvencnek. $\forall(Kg \supset \sim Ke)$.

8. Csak húsevő állatok fognak egeret. $\forall(Eg \supset Hu)$.

9. Utálom azokat az állatokat, amelyek nem vonzódnak hozzám. $\forall(\sim V \supset Ut)$.

10. Azok az állatok, amelyek éjjel járnak zsákmány után, szeretik a Holdat bámulni. $\forall(Ej \supset Ho)$.

Konklúzió (állítólag):

Mindig elkerülöm a kengurukat. $\forall(Kg \supset El)$.

Kíséreljük meg a következtetést a kvantifikációs láncszabállyal igazolni. Mivel a konklúzió "$\forall(Kg \supset El)$", olyan láncot kell keresnünk, amely '*Kg*'-től '*El*'-ig vezet. Első láncszemnek jó lesz a 7. premissza (és csakis ez jó), melynek előtagja '*Kg*', utótagja '$\sim Ke$'. Második láncszemnek '$\sim Ke$' előtagú premissza kellene, de ilyen nincs; ám '*Ke*' utótagként szerepel a 2. premisszában, s ez kontraponálással

$$\forall(\sim Ke \supset \sim Ho)$$

alakra hozható, s ez már jó második láncszemnek. A 10. premissza kontraponáltja:

$$\forall(\sim Ho \supset \sim Ej),$$

s ez lesz a harmadik láncszem. Negyedik láncszem a 4. premissza kontraponáltja:

$$\forall(\sim Ej \supset \sim Hu),$$

ötödik a 8. premissza kontraponáltja:

$$\forall(\sim Hu \supset \sim Eg),$$

hatodik az 5. premissza kontraponáltja:

$$\forall(\sim Eg \supset \sim M),$$

ezt követi az 1., majd a 6. premissza kontraponáltja:

$\forall(\sim M \supset \sim Hb)$ és $\forall(\sim Hb \supset \sim V)$;

s végül a két utolsó láncszem "simán" a 9. és a 3. premissza. Az utóbbi utótagja '*El*', s ez egyben a feltételezett konklúzió utótagja is. A teljes lánc tehát:

$$\begin{array}{cccccccccccc} Kg & - \sim Ke & - \sim Ho & - \sim Ej & - \sim Hu & - \sim Eg & - \sim M & - \sim Hb & - \sim V & - Ut & - El \\ 7. & 2. & 10. & 4. & 8. & 5. & 1. & 6. & 9. & 3. & \end{array}$$

(A láncszemek alatt a premisszák eredeti sorszámait tüntettük föl.) Mivel a lánc '*Kg*'-től '*El*'-ig halad, a tíz premisszából valóban következik '$\forall(Kg \supset El)$', tehát *a következtetés helyes.*

Megjegyzések

1. Ahogyan a hamis előtagú kondicionális mindig igaznak számít, ugyanúgy igaznak számít bármely olyan általánosított kondicionális, amelyben az előtag üres terjedelmű predikátum. Így, ha a zsebemben nincsenek ezresbankók, akkor igaz az, hogy

(a) A zsebemben minden ezres ropogós;

és ha nincsenek nimfák, akkor az is igaz, hogy

(b) Minden nimfa örökifjú.

Persze, ugyanezen feltételek mellett a következők is igazak:

(a′) A zsebemben egyetlen ezres sem ropogós.
(b′) Egyetlen nimfa sem örökifjú.

Az utóbbiak *nem* negációi az előbbieknek, tehát logikai ellentmondás föllépéséről szó sincs. (Ellenőrzésként képezzük mind a négy állítás negációját!) A köznapi gondolkodás számára a logikai elemzés ezen eredményei bizonyára zavarba ejtőek, paradox színezetűek. Ha valakinek a zsebében nincsenek ezresek, az akár (a)-t, akár (a′)-t állítja, kétségtelenül megtévesztő módon jár el, ámde nem hazudik, hanem *információt tart vissza.* Hiszen kevesebb szóval több információt adhatna, nevezetesen ezt:

Egyetlen ezres sincs a zsebemben.

Hasonlóan, ha valaki azt akarja állítani, hogy nincsenek nimfák, de ehelyett (b)-t vagy (b′)-t kommunikálja, ugyancsak információt tart vissza (illetve elködösíti a nimfákra vonatkozó véleményét). Ilyesfajta információ-visszatartás a kvantifikációtól függetlenül is előfordulhat:

(c) Miskolcra a 3-as vagy a 6-os út vezet.

Aki tudja, hogy a 6-os út nem Miskolcra vezet, és mégis a (c) útbaigazítást adja egy érdeklődőnek, az nem hazudik ugyan, de – bár több szót használ – kevesebbet mond, mint amennyit mondhatna. Mint látjuk, itt etikai és nem logikai problémáról van szó. Végül is a logikát nem az érdekli, hogy az ilyen állítások, mint a fenti (a), (b), (c), igazak-e, hanem csak az, hogy igazságuknak mik a feltételei, s ez is csak azért, mert erre alapozza a következtetés fogalmát és törvényeit.

2. A 'minden', 'van olyan' kvantorszavakon kívül a természetes nyelv még számos „kvantáló" kifejezést használ; a gyakoribbak fellépését a következő példák illusztrálják:

kevés fiú, *sok* leány, *számos* diák,
a házak *többsége, a legtöbb* könyv.

Ezekhez járulnak még a numerikusan kvantifikált kifejezések:

három orvos, *öt* fa.

Az utóbbiak logikai szerkezete kifejezhető az elsőrendű logikában (erről a következő fejezetben lesz szó), a többiekhez magasabbrendű logika szükséges. Ám ezek közül csak a 'többsége' egyértelmű (a. m. 'több mint a fele'), a többi határozatlan, következtetés céljaira ritkán használható, s ezért logikai jelentősége csekély.

Ellenőrző kérdések

7.1. Mi az egzisztenciaállítások leggyakoribb típusa? Hogyan fejezzük ki ezek logikai szerkezetét logikai jeleinkkel?

7.2. Milyen szavak utalhatnak egzisztenciális kvantifikációra?

7.3. Hogyan fejezhető ki a negált egzisztenciaállítás? Adjunk két megoldást is!

7.4. Mi az univerzális állítások leggyakoribb típusa? Ábrázoljuk pontos logikai szerkezetüket!

7.5. Milyen stiláris változatai vannak az általánosított kondicionálisnak?

7.6. Hogyan fejezhető ki az általánosított kondicionális negációja egzisztenciális kvantifikációval?

7.7. Ismertesse és indokolja a kvantifikáció kontrapozíció-törvényét!

7.8. Ismertesse és indokolja a kvantifikációs láncszabályt!

7.9. Indokolja a (T47), ..., (T50) törvényeket!

7.10. Melyek az ún. kategorikus állítások típusai?

Gyakorló feladatok

7.1. Írjuk föl az alábbi állítások kvantifikációs szerkezetét: [7: 1... 6.]

a) Nem mind arany, ami fénylik.

b) „Neved ki diccsel ejtené, / Nem él oly velszi bárd." (Arany J.)

c) Akinek vaj van a fején, nem áll a napra.

d) A fémek némelyike elektromos vezető.

e) Vannak türelmetlen emberek, bár nem minden ember türelmetlen.

7.2. Írjuk föl részletesen az alábbi állítások logikai szerkezetét:

a) Ha egy ember mindent akar, semmit sem ér el.

b) Edömér találkozott egy páciensével, de összetévesztette őt saját szomszédai egyikével.

c) Néhány műszaki behatolt az övezetbe, anélkül hogy más, mint műszaki kísérte volna őket.

7.3. Az alábbi formulákban minden változó minden egyes előfordulásáról döntsük el, hogy kötött vagy szabad előfordulás-e!

$\forall x[F(x, y)] \ \& \ \exists y\ [G(y, x)]$

$\forall x[F(x, y) \ \& \ \exists y\ (G(y, x))]$

$\forall x \forall y[F(x, y, z) \ \& \ \exists z\ (G(z, x)) \ \& \ \exists y(G(y, x))]$

$F(x) \ \& \ \forall y \exists x[G(x, y) \ \& \ H(z)] \ \& \ G(x, z)$

7.4. Írjuk föl az alábbi állítások szerkezetét kétféle módon: univerzális, illetve egzisztenciális kvantor használatával:

a) Az oroszlánok nem növényevők.

b) Nincsen rózsa tövis nélkül.

c) Néger eszkimók nincsenek.

d) Nem kedvelem a karrieristákat.

e) Egyetlen tanár sem keres sokat.

f) Senki sem bukik logikából, aki kedveli a szabatosságot.

g) Nem minden mai fiatal tiszteli az időseket.

h) Nem minden külsőség előítélet.

i) A tantestületnek nem minden tagja osztályfőnök.

j) Nincsen olyan ember, aki ne érezné egyszer, hogy sírni kell.

k) Aki nem klubtag, nem fizet tagdíjat.

l) Aki nem kockáztat, az visszavonul.

m) Csak a bátrak nem vonulnak vissza.

n) A pályázók közül csak a kiskorúak nem feleltek meg.

p) Minden ember szabadnak és egyenlőnek született.

r) Akinek nincs barátja, az szomorú.

s) Péter vett egy könyvet, és kölcsönadta azt a barátnőjének.

8. AZ AZONOSSÁG

8.1. AZ AZONOSSÁGPREDIKÁTUM ÉRTELMEZÉSE

Az 5. fejezetben az extenzionális mondatfunktorokat tanulmányozva azt mondtuk, hogy ezek a funktorok *logikaiak*, éspedig abban az értelemben, hogy szemantikai értéküket az egyes interpretációkban nem kell külön-külön rögzíteni, hiszen a nyelv valamennyi interpretációjában ugyanazt a szemantikai értéket kapják. Nem állítottuk azonban, hogy logikai funktorokra csak az extenzionális mondatfunktorok között bukkanhatunk. Előfordulhatnak nyelvünkben olyan, más kategóriába tartozó kifejezések is, amelyek egyszer s mindenkorra rögzített szemantikai értékkel rendelkeznek.

A kétargumentumú predikátumok között is találunk logikai funktort, amint a következő példa elemzéséből kitűnik:

(1) Alice azonos a Fehér Királynővel.

Ebben a mondatban két individuumnév szerepel: 'Alice' és 'a Fehér Királynő'; továbbá egy predikátum: 'azonos'. Az 'azonos' szó szigorú értelmében az (1) mondat igazságfeltétele az, hogy a benne szereplő két név – 'Alice' és 'a Fehér Királynő' – egyazon individuumot nevezzen meg (másképp: *jelöletük* azonos legyen). Kevésbé szabatos szövegekben az 'azonos' szó más, gyöngébb értelemben is szerepelhet. A szigorú értelem rögzítésére bevezetjük a jól ismert '=' szimbólumot, melyet azonosságjelnek, az *azonosságpredikátum* kifejezőjének mondunk. Fölhasználásával (1) így írható:

(1′) Alice = a Fehér Királynő.

Általánosítva: ha a és b individuumnevek, az

$$a = b$$

szerkezetű állításokat *azonossági állításoknak* mondjuk. Egy ilyen állítás akkor és csak akkor igaz, ha a benne szereplő két név – a és b – egyazon individuumot jelöl.

Ennek alapján *az azonosságpredikátum faktuális értéke* az a kétváltozós függvény, amely az 1 (igaz) értéket rendeli az olyan individuumpárokhoz, amelyek két tagja azonos, és a 0 (hamis) értéket a többiekhez (vagyis azokhoz, amelyekben a két tag különböző). Mint minden predikátum faktuális értéke, az azonosságpredikátumé is a tárgyalási univerzum megadásával válik teljesen egyértelművé. *Terjedelmébe* a tárgyalási univerzum elemeiből alkotott azon párok tartoznak, amelyekben a két tag azonos.

Az azonosságpredikátum jelentését e szabállyal rögzítettük, ennek révén a tárgyalási univerzum megadása után faktuális értéke már egyértelműen és automatikusan meghatározódik. Ezért sorolhatjuk e predikátumot a *logikai* funktorok közé.

A matematikában az '=' jelet és az 'azonos' szót többnyire a logikai azonosságpredikátummal azonos értelemben használják (például az '$5 \cdot 3 = 15$' aritmetikai állításban, vagy abban a geometriai állításban, hogy 'bármely háromszögben a köré írt kör középpontja *azonos* az oldalfelezők metszéspontjával'). Az '$x^2-y^2 = (x+y) \cdot (x-y)$' kifejezést azonosságnak nevezve, ezt ténylegesen a

$$\forall x \forall y[x^2-y^2 = (x+y) \cdot (x-y)]$$

univerzális állítás rövidítésének tekintik (a kvantifikáció tartománya valamely számhalmaz). Néha, de nem mindig, az 'egyenlő' szó az 'azonos' szinonimájaként szerepel a matematikában. De amikor azt mondják, hogy egy bizonyos háromszög két szöge (vagy két oldala) *egyenlő,* akkor ezt nem úgy értik, hogy *azonos* (hiszen akkor *két* szög, illetve oldal helyett csak *egy* lenne), hanem úgy, hogy *egybevágó* vagy azonos *mértékű.* Ez a példa illusztrálja, hogy nem helyes az 'egyenlő' szó használata az 'azonos' helyett, és fordítva még kevésbé. Elvégre, a törvény előtt mindnyájan *egyenlőek* lehetünk anélkül, hogy *azonosak* lennénk egymással.

8.2. AZ AZONOSSÁG LOGIKAI TÖRVÉNYEI

Az önazonosság törvénye. Ha az azonosságpredikátum mindkét bemenetét egyazon névvel töltjük ki, magától értetődően igaz (bár tartalmilag semmitmondó) állítást kapunk:

(2) $a = a$.

Egy ilyen szerkezetű mondat semmiképpen sem lehet hamis, bárhogyan interpretáljuk is az a nevet.

Ha egy mondatsémából a benne szereplő paraméterek bármely behelyettesítése és interpretálása esetén igaz mondat keletkezik, akkor azt mondjuk, hogy a séma *logikai igazságot* fejez ki. Az ilyen sémák behelyettesítéseként nyert mon-

datokat is logikai igazságoknak mondjuk. Az elnevezést az indokolja, hogy az ilyen mondatok pusztán logikai szerkezetük alapján igazak. Így a (2) típusú mondatok az azonosságjel jelentése alapján igazak.

Azt, hogy egy séma logikai igazságot fejez ki, a séma elé írt nyíllal ($\Rightarrow$) jelöljük. (Ezt a jelölést már 5.5. végén is használtuk.) Alkalmazzuk ezt (2)-re:

(T51) $\Rightarrow (a = a)$.

Azt, hogy (T51)-ben a nyíl bal oldalán nincs semmi, értelmezhetjük úgy is, hogy egy "$a = a$" szerkezetű állítás már *az üres premisszahalmaznak is következménye,* és ezért nem szerepel a nyíl bal oldalán egyetlen premissza sem.

A (T51) törvény folytán az "$x = x$" nyitott mondat is igaz, bárhogyan értékeljük az x változót. Ennélfogva e nyitott mondat univerzális kvantifikációja is logikai igazság:

(T52) $\Rightarrow \forall x(x = x)$.

E két törvényt egyaránt az *önazonosság* törvényének nevezzük. Az első az egyedi, a második az univerzális fogalmazása ugyanazon törvénynek.

Leibniz törvénye. Az extenzionális logikában bármely funktor argumentuma felcserélhető egy vele azonos faktuális értékű kifejezéssel anélkül, hogy a kimenet faktuális értéke megváltozna. Ezért: ha $a = b$, és az F funktornak argumentuma lehet a, akkor $F(a)$ és $F(b)$ faktuális értéke azonos. Ha történetesen $F(x)$ egy nyitott mondat, akkor helyes az alábbi következtetés:

(T53) $\{a = b, F(a)\} \Rightarrow F(b)$.

Ebből következik, hogy egy

$(a = b \ \& \ F(a)) \supset F(b)$

szerkezetű kondicionális mindig igaz (hiszen előtagjának logikai következménye az utótagja). Helyettesítsük a-t és b-t változókkal:

$(x = y \ \& \ F(x)) \supset F(y)$.

Az iméntiek folytán minden ilyen szerkezetű kondicionális igaz, bárhogyan értékeljük is az x, y változókat. (Egyedül arra kell ügyelnünk, hogy e változókat úgy válasszuk meg, hogy ne váljanak kötötté, ha $F(a)$-ban a helyére kerülnek.) Ennélfogva a változókat leköthetjük (a mondat elején) univerzális kvantifikációval:

(T54) $\Rightarrow \forall x.\forall y[(x = y \ \& \ F(x)) \supset F(y)]$.

A (T53)–(T54) törvények az ún. *Leibniz-elv* kifejezői az extenzionális logikában; az első az egyedi, a második az univerzális változatban. (Az elnevezés magyarázatára hamarosan rátérünk.)

Láttuk, hogy az azonosságpredikátumot nem a jelentésazonosság, hanem a jelöletazonosság értelmében használtuk. Ugyanakkor a Leibniz-törvény nem alkalmazható, ha az azonos jelöletű nevek *intenzionális funktor* argumentumában szerepelnek. Erre egy példa a következő:

(3) Móricz Zsigmond = az *Erdély trilógia* írója.
(4a) Péter tudja, hogy Móricz Zsigmond Leányfalun élt.
(4b) Péter tudja, hogy az *Erdély trilógia* írója Leányfalun élt.

(3) és (4a) lehet egyszerre igaz, anélkül hogy (4b) igaz lenne. A „Péter tudja, hogy" kifejezés *intenzionális funktor:* kimenetének igazságértéke függhet a bemenet intenziójától is (lásd a 3.3. szakaszt). A (3) azonosság viszont csak azt állítja, hogy a két név *jelölete* (faktuális értéke) azonos. Intenziójuk lehet különböző (és ténylegesen különböző is). Ez világossá teszi, hogy (3) igazságából *nem következik* az, hogy (4a) és (4b) igazságértékének meg kell egyeznie.

8.3. MÓDSZERTANI MEGJEGYZÉSEK

Az azonossággal kapcsolatos régi félreértés, hogy az igaz azonossági állítások semmitmondóak, triviálisak, hiszen, úgymond, „csak *a*-ról lehet azt állítani, hogy azonos *a*-val", de hát azt úgyis mindenki tudja, hogy $a = a$. Ez az érvelés azért hibás, mert összekeveri az azonossági állítás grammatikai formáját és igazságának feltételét, végső soron pedig az egyedi tárgyat és a tárgy megnevezését. Természetesen igaz, hogy egy tárgy csak önmagával lehet azonos: ha *két* tárgy azonos lenne, akkor *egy* lenne; de ami kettő, az nem egy. Ha minden tárgynak csak *egy neve* lehetne, akkor a fenti eszmefuttatás az azonosság trivialitásáról igaz is lenne. De hát egy-egy tárgyat többféle módon (különböző leírásokkal) is meg tudunk nevezni, és ezért nem triviálisak az "$a = b$" szerkezetű azonossági állítások, ha *a* és *b* *különböző nevek,* noha egyazon tárgyat jelölik. Az, amit *a* jelöl, csak önmagával lehet azonos, de *más név* is jelölheti ugyanazt, amit *a* jelöl. Az alábbi két azonosság mindegyike igaz:

(5) A Vénusz azonos az Esthajnalcsillaggal.

(6) A Vénusz azonos a Vénusszal.

Csakhogy (6) logikai okokból igaz (lásd az önazonosság törvényét), (5) ezzel szemben lehetne hamis is, s fontos csillagászati információ, hogy ennek ellenére

igaz. S ez az információ valahogy a világról szól, szemben (6)-tal, amely legfeljebb a logikáról (a logika egyik törvényének adott megnyilvánulásáról) informál bennünket.

Igaz ugyan, hogy ha "$a = b$" igaz, akkor *igazságértéke,* faktuális értéke ugyanaz, mint "$a = a$" faktuális értéke, de ahhoz, hogy a két állítás lényegesen eltérő információtartalmáról számot adjunk, elegendő azt megmutatni, hogy a két állítás jelentése, intenziója különböző; s valóban az intenziók jól megkülönböztethetők.

Az azonosságrelációt G. W. Leibniz az alábbi tulajdonsággal jellemezte:

> Azonosak (vagy egybeesők) azok, amelyek mindenütt helyettesíthetők egymással az igazság megsértése nélkül.

A Leibniz-elv ezen megfogalmazása némi kommentárt igényel. Először is arra kell felfigyelni, hogy az elv nyelvi megfogalmazása (rejtett) bikondicionálist tartalmaz: az azonosak mindenhol helyettesíthetők egymással az igazság megsértése nélkül, és amik mindenhol helyettesíthetők egymással az igazság megsértése nélkül, azok azonosak. Ez lehetővé teszi az elv olyan értelmezését is, mely szerint itt nem pusztán az azonosságra vonatkozó egyik logikai elvvel van dolgunk, hanem az azonosság meghatározásával.

Továbbá az „igazság megsértése nélkül" kitétel arra utal, hogy azok a kifejezések, amelyekben az azonosak helyettesíthetők egymással, igazak vagy hamisak lehetnek, tehát feltehetően állításokat kifejező mondatok.

Ugyanakkor észre kell venni azt is, hogy az elv nincsen korlátozva individuumnevekre, mivel nincs meghatározva, hogy mik lehetnek azonosak.

Az előző szakasz végén is láttuk, hogy az azonos faktuális értékű kifejezések intenzionális funktor argumentumában nem cserélhetők föl egymással „az igazság megsértése nélkül". Amik mindenhol fölcserélhetők, azoknak *intenziójukban* (jelentésükben) is meg kell egyezniök. Az eredeti Leibniz-féle meghatározás tehát az *intenzióazonosság* definíciójaként értékelhető.

Ezek szerint a jelen fejezetben bevezetett '=' predikátum más, mint ami a Leibniz-szövegben szerepel. Látható az is, hogy (T53) gyöngített változata az eredeti Leibniz-elvnek. Gyöngített, mert csak egyirányú következtetésre ad lehetőséget (nem fogalmazható át logikai ekvivalenciává), és mert csak extenzionális szerkezetekre alkalmazható. Magasabb rendű (nem elsőrendű) logikában, ahol predikátumváltozókat is használnak és kvantifikálnak, a törvény így erősíthető:

$$(a = b) \Leftrightarrow \forall P[P(a) \supset P(b)]$$

(itt P predikátumváltozó). De ekkor is megmarad az extenzionális predikátumokra való korlátozás.

Az azonosságpredikátummal való megismerkedés után már kimerítően felsorolhatjuk a klasszikus elsőrendű logikában használatos logikai szimbólumokat („logikai konstansokat") és a nekik megfelelő logikai szavakat. Ezek a következők:

nem,	és,	vagy,	ha,	akkor és csak akkor,
$\sim$	&	$\vee$	$\supset$	$\equiv$
		minden,	van,	azonos
		$\forall$	$\exists$	$=$

Ezek közül elég lenne ez a négy is:

$$\sim,\ \&,\ \forall,\ =,$$

hiszen a többi kifejezhető ezek segítségével.

8.4. AZ AZONOSSÁG REJTETT ELŐFORDULÁSAI

Tekintsük a következő mondatot:

(7) Dezső mindenkitől elbúcsúzott.

Ezt a mondatot rendszerint úgy értjük, hogy Dezső mindenkitől, azaz a tárgyalási univerzumba tartozó valamennyi személytől elbúcsúzott, kivéve természetesen saját magát. Azaz, minden, tőle különböző személytől elbúcsúzott, vagy másképpen: elbúcsúzott mindenkitől, aki nem azonos vele. Ezek után már nem nehéz felírni (7) logikai szerkezetét:

(7') $\forall x$ [(x ember & Dezső $\neq x$) $\supset$ Dezső elbúcsúzott x-től].

Itt, sejthetően, 'Dezső $\neq x$' a '$\sim$ (Dezső $= x$)' negációt rövidíti. Ez az azonosság, illetve a tagadott azonosság rejtett előfordulásának egy tipikus esete.

Vegyük szemügyre most a következő mondatot:

Mária is énekel.

E mondat egyrészt azt állítja, hogy Mária énekel, az 'is' szócska révén azonban még azt is mondja, hogy valaki más (valaki, aki nem azonos Máriával) ugyancsak énekel. Logikai szerkezetét tehát a következő konjunkció fejezi ki:

(8) Mária énekel & $\exists x$ [x énekel & $x \neq$ Mária].

Kontrasztként, a

(9) Csak Mária énekel

mondat állítja a (8) alatti konjunkció első tagját, és tagadja a másodikat (vagyis azt, hogy Márián kívül bárki is énekel). Tehát (9) logikai szerkezete a következő:

(9.1) Mária énekel & $\sim \exists x$ [x énekel & $x \neq$ Mária].

Lássuk külön is e konjunkció második tagját:

$\sim\exists x$ [x énekel & $x \neq$ Mária].

Ez azt fejezi ki, hogy senki sem énekel, aki Máriától különbözik. A (T36) törvény szerint ezt átalakíthatjuk így:

(10) $\forall x$ [x énekel $\supset x =$ Mária].

Tehát (9) így is kifejezhető:

(9.2) Mária énekel & $\forall x$ [x énekel $\supset x =$ Mária].

De még rövidebb kifejezési formát is találhatunk. Írjunk (10)-ben a kondicionális jele helyett bikondicionális jelet:

(9.3) $\forall x$ [x énekel $\equiv x =$ Mária).

Szavakban: Bármi legyen is x, x akkor és csak akkor énekel, ha azonos Máriával. Mivel Mária azonos Máriával, ebből következik, hogy Mária énekel, tehát ezt nem kell konjunkcióval hozzáfűznünk. Azaz: (9) legtömörebb kifejezési formája (9.3).

Vizsgálataink ban sem az 'énekel' predikátum, sem a 'Mária' név szemantikai értéke nem játszott szerepet. Az eredményt tehát így általánosíthatjuk:

Ha $F(x)$ tetszőleges nyitott mondat, akkor azt, hogy az F predikátum csak a-ra igaz (ahol a tetszőleges név), *a következő módon fejezhetjük ki:*

(11) $\forall x[F(x) \equiv x = a]$,

vagy

(12) $F(a)$ & $\forall x[F(x) \supset x = a]$.

A két megoldás egyenértékűségét a következő logikai ekvivalenciával írhatjuk fel:

(T55) $\forall x[F(x) \equiv x = a] \Leftrightarrow (F(a)$ & $\forall x[F(x) \supset x = a])$.

Helyettesítsük (11)-ben az a nevet egy új változóval, mondjuk y-nal, és kössük le y-t a mondat elején egzisztenciális kvantorral:

(13) $\exists y.\forall x[F(x) \equiv x = y]$.

Ez azt állítja, hogy az F predikátum csak egyetlen tárgyra igaz, azaz hogy *terjedelme egyelemű.* A (11) séma tartalma ettől csak annyiban tér el, hogy meg is nevezi (a-val) ezt az egyetlen tárgyat. Az eljárás persze (12)-re is alkalmazható:

(14) $\exists y[F(y) \ \& \ \forall x[F(x) \supset x = y]]$.

Természetesen (13) és (14) logikailag ekvivalensek. Így például az

Egy, csak egy legény van talpon a vidéken

Arany-verssor logikai szerkezete:

$\exists y.\forall x$ [(x legény a vidéken & x talpon van) $\equiv x = y$].

Mint tudjuk, azt, hogy F terjedelme nem üres, azaz hogy *legalább egy* eleme van, a

$\exists x.F(x)$

egzisztenciaállítás fejezi ki. Azt, hogy e terjedelem *éppen* egyelemű, (13) ábrázolja, amelyet ezért *unicitásmondat*nak is nevezhetünk, s bevezethetjük rá a következő rövidítést:

(T56) $\exists! x.F(x) \Leftrightarrow \exists y.\forall x[F(x) \equiv x = y]$. *(Definíció)*

'$\exists! x$' kiolvasása: 'egyetlen olyan x van, hogy'.

Hogyan fejezhetnénk ki azt, hogy valamiből *legföljebb egy* van, azaz hogy egy $F(x)$ predikátum terjedelme legföljebb egyelemű? Azzal, hogy $F(x)$-ből és $F(y)$-ból $x = y$ következik, bármi legyen is x és y. Azaz:

(15) $\forall x.\forall y[(F(x) \ \& \ F(y)) \supset x = y]$.

Például a 'Legföljebb egy ember dolgozik' logikai szerkezete:

$\forall x.\forall y$ [(x ember & x dolgozik & y ember & y dolgozik) $\supset x = y$].

Ha hamis az, hogy valamiből legföljebb egy van, akkor több mint egy – azaz legalább kettő – van belőle. Tehát (15) negációja alkalmas annak kifejezésére,

hogy az $F(x)$ predikátum terjedelme több mint egy- (legalább két-) elemű. A (T34.1) törvény kétszeri alkalmazásával

$$\sim \forall x.\forall y\,[\ldots] \Leftrightarrow \exists x.\exists y \sim [\ldots],$$

továbbá a kondicionális definíciója (T13) folytán

$$\sim [(F(x)\ \&\ F(y)) \supset x = y] \Leftrightarrow (F(x)\ \&\ F(y)\ \&\ x \neq y).$$

Ezek folytán (15) negációja így írható:

(16′) $\exists x.\exists y[F(x)\ \&\ F(y)\ \&\ x \neq y]$.

E séma tehát azt fejezi ki, hogy az $F(x)$ predikátum terjedelme legalább kételemű. Például a 'Legalább két barátom van' szerkezete:

(16′) $\exists x.\exists y$ [barátom x & barátom y & $x \neq y$].

Az '$x \neq y$' kitétel szerepe lényeges! Mert ha csak egy barátom van, mondjuk Ali, akkor a 'barátom x & barátom y' nyitott mondat igazságához elég, hogy x és y értéke egyaránt Ali legyen, és így a

$\exists x.\exists y$ [barátom x & barátom y)

mondat igaz. Ez tehát kevés a „legalább kettő" kifejezéséhez; bele kell venni azt is, hogy x és y különbözőek.

Innen már egyszerű továbbhaladni annak kifejezése felé, hogy legalább három barátom van:

(17) $\exists x.\exists y.\ \exists z$ [barátom x & barátom y & barátom z & $x \neq y$ & $x \neq z$ & $y \neq z$).

Ha pontosabban megismerem azokat, akiket a barátaimnak tartottam, s megállapítom, hogy számuk kettő, akkor ezt a

(18) Csak két barátom van

mondattal fejezhetem ki. E mondat logikai szerkezetéhez két különböző úton is eljuthatunk. Az eddigiek felhasználásával kézenfekvőnek tűnik (18)-at helyettesíteni a vele egyenértékű „Van legalább két barátom, de nem igaz, hogy van legalább három barátom" állítással, mert ennek szerkezetét megkapjuk, ha (16′)-höz konjunkcióval hozzáfűzzük (17) negációját. De az unicitásmondat felírása során tapasztaltakat felhasználva egyszerűbb (vagy legalábbis rövidebb) megoldást is találhatunk:

(18′) $\exists x.\exists y[x \neq y \ \& \ \forall z \ [\text{barátom}\, z \equiv (z = x \vee z = y)]]$.

A két út természetesen logikailag ekvivalens mondatokat eredményez. De ennek az ekvivalenciának az igazolása nem tűnik túlságosan egyszerűnek; s ez fölveti azt az igényt, hogy – ha lehetséges – adjunk olyan általános módszert, amelynek segítségével a logikai ekvivalenciák érvényessége belátható. A 10. fejezetben meg is fogunk ismerkedni ilyen módszerrel.

Általánosítva (18′)- t, azt, hogy $F(x)$ terjedelme kételemű, így fejezhetjük ki:

$$\exists x.\exists y.[x \neq y \ \& \ \forall z \ [F(z) \equiv (z = x \vee z = y)]].$$

E sémát, (T56) mintájára, így rövidíthetjük:

$$\underset{2}{\exists!}x.\mathrm{F}(x).$$

Kézenfekvő az áttérés a kettőről a háromra:

(19) $\exists x_1.\exists x_2.\exists x_3[x_1 \neq x_2 \ \& \ x_1 \neq x_3 \ \& \ x_2 \neq x_3 \ \&$
$\forall y[F(y) \equiv (y = x_1 \vee y = x_2 \vee y = x_3)]]$.

és ezt, persze, "$\underset{3}{\exists!}x.\ F(x)$" rövidítheti.

A folytatás a háromon túl is a (19) mintát követi. Az elején annyi "$x_i \neq x_j$" alakú kifejezést kell szerepeltetni, amennyi biztosítja, hogy a különböző változók értéke különböző legyen. Ha a változók száma $n \geq 2$, a negált azonosságok száma

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Látható, hogy ha egy predikátum terjedelme véges, akkor mindig felírható olyan mondat, amely a terjedelem számosságát fejezi ki, anélkül hogy a mondatban számnév szerepelne.

A bemutatott példák mutatják, hogy hogyan lehet kifejezni az elsőrendű logikában a numerikus kvantifikációt, amelyet az előző fejezet végén említettünk. Az is látható, hogy a többes számú egzisztenciális kvantifikáció esetén hogyan lehet a többes számot is kifejezésre juttatni. Ha a

Vannak szorgalmas diákok

mondatban a többes számot „komolyan vesszük", vagyis úgy értjük, hogy *több mint egy* szorgalmas diák létezik, akkor a következő megoldást alkalmazhatjuk:

$\exists x.\exists y \ [x \neq y \ \& \ x$ szorgalmas $\& \ x$ diák $\& \ y$ szorgalmas $\& \ y$ diák].

('Van legalább két szorgalmas diák.') Ha valaki itt kevesli a kettőt, nem adhatunk

neki más tanácsot, mint azt, hogy írjon annyit, amennyit szerinte a többes szám használata minimálisan megkövetel. Ugyanígy fejezhetjük ki a 'néhány'-at is, ha kiveselljük azt az értelmezését, hogy 'legalább egy'. Ha valaki például úgy véli, hogy a 'néhány' jelentése 'legalább három', akkor a (17) mintát követheti.

8.5. A RELÁCIÓK NEVEZETES TÍPUSAI

E szakaszban csak kétargumentumú predikátumokkal foglalkozunk. Ezek azért figyelemre méltóak, mert elég gyakran végzünk olyan következtetéseket, amelyekben ezek egyszerű tulajdonságait lényegesen kihasználjuk. Tipikus matematikai következtetés például az alábbi:

(I) Az *a* és a *b* egyenesek párhuzamosak egymással.
A *b* és a *c* egyenesek párhuzamosak egymással.
Tehát: Az *a* és a *c* egyenesek is párhuzamosak egymással.

Matematikai gyakorlatunk azt sugalmazza, hogy ez a következtetés helyes. Kétségeket ébreszt viszont az alábbi:

(II) Az *a* és a *b* egyenesek merőlegesek egymásra.
A *b* és a *c* egyenesek merőlegesek egymásra.
Tehát (?): Az *a* és a *c* egyenesek is merőlegesek egymásra.

Ugyanaz a matematikai gyakorlat, amelynek alapján az (I) következtetést helyesnek minősítettük, most azt sugalmazza, hogy (II) helytelen. Pedig a két példa között csak az a különbség, hogy az elsőben a 'párhuzamosak', a másodikban pedig a 'merőlegesek' predikátumot szerepeltettük. Csak azért lehet az első következtetés helyes (ha helyes), a második meg helytelen, mert az elsőben kihasználtunk egy olyan rejtett premisszát, amely a másodikban nem teljesül, az elsőben azonban igen; s így az első következtetésre nem lehet cáfoló ellenpéldát találni, ha csak olyan egyeneseket fogadunk el, amilyenekkel az euklideszi geometria foglalkozik. De vegyük észre, hogy ebben az érvelésben már a nem logikai szavak, nevezetesen az 'egyenes' és a 'párhuzamos' szavak jelentésének figyelembevételéről van szó. Jogos az az elvárás, hogy a geometriai következményfogalom és a logikai következményfogalom között ne engedjünk meg különbséget. Ennek azonban csak úgy tehetünk eleget, ha az (I) következtetésben kihasznált jelentéskomponenst explicitté tesszük, és fölvesszük a premisszák közé. A figyelembe vendő jelentéskomponens a párhuzamossági reláció egy olyan tulajdonsága, amely számos más relációra is vonatkozik, de a merőlegesség relációjára nem.

Ezzel kapcsolatban nem matematikai példát is említhetünk. Hasonlítsuk össze az alábbi két „következtetést".

(III) Anna fiatalabb, mint Bella.
Bella fiatalabb, mint Csilla.
Tehát: Anna fiatalabb, mint Csilla.

(IV) Anna anyja Bellának.
Bella anyja Csillának.
(?) Anna anyja Csillának.

A (III) alatti példát a kezdő (aki még nem ismeri a helyes következtetés logikai fogalmát) elfogadja jónak, a (IV) alattira azonban nyilván ezt mondja: „Butaság. Anna *nagyanyja* Csillának." A két következtetés azonban egyazon logikai sémát követ, nevezetesen ezt:

(*) $\{Fab, Fbc\} \Rightarrow Fac.$

Az egyik esetben F szerepét a 'fiatalabb, mint', a másik esetben pedig az 'anyja' predikátum tölti be. Így vagy mindkét következtetés helyes, vagy egyik sem. Mivel a (IV) nyilvánvalóan hibás, ténylegesen egyikük sem helyes. Másképp: a (*) alatti következtetési séma nem helyes.

A kezdőnek azonban igaza van annyiban, hogy ha a (III) következtetés premisszái igazak, akkor konklúziója sem lehet hamis. A *logikai* kifogás csak az, hogy ez nem pusztán a szereplő mondatok *logikai szerkezetén* múlik (hiszen ha csak azon múlna, akkor (IV) is helyes lenne), hanem még a 'fiatalabb, mint' predikátum jelentésének egy olyan mozzanatán, amely az 'anyja' predikátum jelentéséből hiányzik. A helyzet ugyanaz, mint a korábbi geometriai példapárban. A 'párhuzamos' és a 'fiatalabb, mint' predikátumok rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, amelyet *tranzitivitásnak* fogunk mondani, a 'merőleges' és az 'anyja' viszont nem rendelkeznek ezzel.

A tranzitivitás. Az R relációt az U tárgyalási univerzumon tranzitívnak mondjuk, ha valahányszor úgy választjuk U-ból az a, b, c elemeket, hogy R fönnálljon egyrészt a és b között, másrészt b és c között, mindannyiszor R fönnáll a és c között is. Tömörebben: R tranzitív U-n, ha a

(20) $\forall x \forall y \forall z[(Rxy \ \& \ Ryz) \supset Rxz)]$

mondat igaz, ha a kvantifikáció tartománya az U halmaz.

Tranzitív relációra példák az alábbiak:

azonos, nagyobb, egybevágó, hasonló, párhuzamos, fiatalabb mint, része.

Egy relációt *intranzitívnek* mondunk, ha a tranzitivitás sohasem teljesül:

(20a) $\forall x \forall y \forall z \ ((Rxy \& Ryz) \supset \sim Rxz))$

Például: apja, merőleges.

Különböztessük meg az intranzitív relációt a nem tranzitívtől. Ilyenek az *ismeri, szereti, tudja* relációk. Ugyanis abból, hogy *a* ismeri *b*-t és *b* ismeri *c*-t, sem azt nem állíthatjuk, hogy *a* ismeri *c*-t, és azt sem, hogy *a* nem ismeri *c*-t.

Az (I) és a (III) következtetést ki lehet javítani egy-egy pótpremisszával, amelynek szerkezetét (20) mutatja. (*R* helyébe a megfelelő predikátumot téve.) Viszont (II) és (IV) menthetetlenül hibás.

Két reláció, *R* és *S*, *összetételén* vagy *relatív szorzatán* azt a *T* relációt értjük, amelyre *aTb* akkor és csak akkor áll, ha van olyan *x* elem, hogy *aRx* és *xSb* fönnáll: jelölése "$R \mid S$". (Ha például *R* az 'apja' *S* az 'anyja' reláció, akkor $a(R \mid S)b$ azt jelenti, hogy valamely *x*-re *a* apja *x*-nek és *x* anyja *b*-nek, azaz *a* anyai nagyapja *b*-nek. Tehát: apja | anyja = anyai nagyapja.)

A szimmetria. Az *R* relációt az *U* halmazon *szimmetrikusnak* mondjuk, ha argumentumainak sorrendje közömbös, azaz ha fennáll (az *U*-beli) *a* és *b* között, akkor fönnáll *b* és *a* között is; azaz ha a

(21) $\forall x \forall y(Rxy \supset Ryx)$

mondat igaz *U*-n.

Szimmetrikus relációra példák az alábbi kulcsszavakkal jelzett relációk (alkalmasan választott *U* mellett):

testvére, rokona, házastársa, párhuzamos,
merőleges, egybevágó, hasonló, azonos.

Mivel a szimmetrikus relációk esetén az argumentumok sorrendje közömbös, általában az "*a* és *b* *R*-ek" formában szoktuk kifejezni azt, hogy *a* a szimmetrikus *R* relációban áll *b*-vel. Például:

$$a \text{ és } b \begin{cases} \text{testvérek,} \\ \text{párhuzamosak,} \\ \text{hasonlóak.} \end{cases}$$

Ez a nyelvi forma nyilván nem használható olyan relációk esetén, amelyekben az argumentumok sorrendje sohasem cserélhető föl, mint például

szülője, anyja, férje, őse, fiatalabb, kisebb.

Az ilyen relációkat *aszimmetrikusaknak* mondjuk. Az *R* reláció aszimmetrikus *U*-n, ha a

(22) $\forall x \forall y[Rxy \supset \sim Ryx)$

mondat igaz *U*-n.

Előfordulhat, hogy egy reláció nem szimmetrikus, de nem is aszimmetrikus. Ilyen például a 'tiszteli' tárgyas igével kifejezett reláció (az emberek halmazán). Ha *a* tiszteli *b*-t, akkor lehet, hogy *b* is tiszteli *a*-t, de az is lehet, hogy nem. Ha azt mondjuk, hogy *a* és *b* *tisztelik egymást,* ezzel az '*a* tiszteli *b*-t, és *b* tiszteli *a*-t' konjunkciót rövidítjük. Ez némely (*a*, *b*) párra igaz lehet, anélkül hogy a 'tiszteli' predikátum szimmetrikus lenne. Ugyanez áll számos, tárgyas igével kifejezett relációra (például 'szereti').

Valószínűleg csak matematikai példa van az ún. *antiszimmetrikus* relációkra. Ezek „majdnem" aszimmetrikusak, azzal a kivétellel, hogy két argumentumuk azonossága nincs kizárva. Az *R* reláció antiszimmetrikus *U*-n, ha a

(23) $\forall x \forall y[(Rxy \ \& \ Ryx) \supset y = x]$

mondat igaz *U*-n. Példák:

≤ (kisebb vagy egyenlő), osztója.

A reflexivitás. Az *R* relációt *reflexív*nek mondjuk *U*-n, ha *U* minden eleme az *R* relációban áll önmagával, azaz ha

(24) $\forall x.Rxx$

igaz *U*-n. Reflexív relációk: az azonosság (bármely *U*-n), a geometriában az egybevágóság és a hasonlóság, a pozitív egész számok körében az

(*x* osztója *y*-nak)

reláció. Az emberek halmazán reflexívek az 'egyidős' és az 'egyforma magas' kulcsszavakkal jelzett relációk.

A nem reflexív relációkra az jellemző, hogy

$\exists x[\sim Rxx]$.

Érdekesek azok a nem reflexív relációk, amelyekre az is teljesül, hogy

(25) $\forall x[\sim Rxx]$.

Ha e mondat igaz az *U* halmazon, akkor azt mondjuk, hogy *R* *irreflexív* *U*-n. Irreflexív relációk pl.

anyja, öccse, felesége, nagybátyja, kisebb.

Hangsúlyozzuk, hogy a reflexivitás hiánya és az irreflexivitás nem ugyanaz. Az irreflexív relációk persze nem reflexívek, de vannak olyan nem reflexív relá-

ciók, amelyek nem irreflexívek. Ilyen például a 'dicséri' tárgyas igével kifejezett reláció. Van, aki dicséri önmagát, és van, aki nem teszi ezt.

Ha R aszimmetrikus U-n, akkor ugyanott irreflexív is. Tegyük föl ugyanis, hogy x-et lehetne úgy értékelni U-n, hogy

(26) Rxx

igaz legyen. Ekkor, az aszimmetriát kimondó (22) állítás folytán

$Rxx \supset \sim Rxx$

is igaz lenne. De ebből és (26)-ból '$\sim Rxx$' következne, ellentmondva (26)-nak. Következésképp (26) nem értékelhető igazra U-n, és így '$\forall x[\sim Rxx]$' igaz U-n. Ez pedig, (25) szerint éppen R irreflexivitását jelenti.

Ha R irreflexív és tranzitív U-n, akkor ugyanott aszimmetrikus is. Ugyanis ha x-et és y-t lehetne úgy értékelni U-n, hogy

(27) $Rxy \,\&\, Ryx$

igaz legyen, akkor a tranzitivitást biztosító (20) folytán

$(Rxy \,\&\, Ryx) \supset Rxx$

is igaz lenne. Ebből és (27)-ből 'Rxx' következne, ellentmondva az irreflexivitást kimondó (25) formulának. Következésképp (27) nem értékelhető igazra U-n és így

$\forall x \forall y[\sim (Rxy \,\&\, Ryx)]$

igaz U-n; ez pedig logikailag ekvivalens az aszimmetriát kimondó (22) formulával.

Ekvivalenciarelációk. Ha az R reláció reflexív, szimmetrikus és tranzitív U-n, akkor azt mondjuk, hogy R *ekvivalenciareláció* U-n. Az azonosság minden halmazon ekvivalenciareláció. A geometriai alakzatok halmazán ekvivalenciarelációk az egybevágóság és a hasonlóság. Az állítások halmazán pedig a logikai ekvivalencia létesít – nevével összhangban – ekvivalenciarelációt. Az emberek halmazán például az

(28) (ugyanazon évben született, mint)

predikátum fejez ki ekvivalenciarelációt. (Ellenőrizzük mindhárom megkívánt tulajdonság teljesülését!)

Ha R ekvivalenciareláció U-n, akkor felosztja U-t közös elem nélküli részhalmazokra úgy, hogy e részek egyesítése kiadja a teljes U-t. Egy-egy részbe U azon

elemei kerülnek, amelyek között fennáll az R reláció. Ezt úgy szokás kifejezni, hogy *R felosztást* – latin eredetű szóval: *particiót* – létesít U-n. Például a (28) alatti reláció úgy osztja föl az emberek osztályát alosztályokra, hogy egy-egy alosztályba csakis az azonos évjáratú személyek kerülnek.

Itt két szélső (elfajuló) esetet említhetünk. Az egyik eset az, amikor az ekvivalenciareláció egyetlen részre „osztja fel" U-t. Ez akkor következik be, ha

$$\forall x \forall y . Rxy$$

igaz U-n, azaz ha U bármely (a, b) elempárja között fennáll az R reláció. A másik szélső eset az, amikor minden alosztályba egy-egy elem kerül. Ez következik be például akkor, ha ekvivalenciarelációként az azonosság szerepel (hiszen egy objektum önmagával és csak önmagával azonos).

A pedagógiai munkában gyakran esik szó valamely fajtafogalom felosztásáról. Vegyük U szerepében a felosztandó fogalom terjedelmét; ekkor a fogalom bármely felosztása egy-egy ekvivalenciareláció révén realizálható. (A „különböző szempontú" felosztásoknak különböző ekvivalenciarelációk alkalmazása felel meg.) Ha meg tudunk fogalmazni egy ekvivalenciarelációt U-n, akkor ez automatikusan elvégzi a felosztást. Ha viszont a felosztást adjuk meg előre, akkor ebből leolvashatunk egy ekvivalenciarelációt U-n, nevezetesen: az U-beli elemek között értelmezzük az R relációt úgy, hogy "*Rab*" akkor és csak akkor álljon fönn, ha a és b a felosztás egyazon alosztályába tartoznak. (Gondoljuk át, hogy az így értelmezett reláció valóban reflexív, szimmetrikus és tranzitív.) Ennélfogva egy fajtafogalom minden felosztásának egy-egy ekvivalenciareláció képezi az alapját (függetlenül attól, hogy e reláció kifejezésére van-e kényelmes nyelvi formánk).

Az R relációt az U halmazon *összefüggő*nek *(trichotom*nak*)* mondjuk, ha U bármely két (különböző) eleme között fennáll vagy az *Rab,* vagy az *Rba* reláció. Ezt a tulajdonságot így fejezhetjük ki:

$$\forall x \forall y [x \neq y \supset (Rxy \vee Ryx)].$$

A számok körében (legyen szó akár az egész, akár a racionális, akár a valós számokról) a 'kisebb' reláció ($<$) ezt a követelményt is teljesíti.

Rendezési relációk. Gyönge rendezési relációknak nevezzük a reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív relációkat. A valós számok halmazán értelmezett '$\leq$' predikátum ilyen gyönge rendezési reláció. A pozitív egész számok között az 'osztója' reláció ugyancsak gyönge rendezés.

Erős rendezési relációknak mondjuk az irreflexív és tranzitív relációkat. (Föntebb láttuk, hogy az ilyen relációk egyben aszimmetrikusak is. Ha egy reláció tranzitív és aszimmetrikus, akkor – mint nemrég láttuk – irreflexív is, tehát erős rendezés.) A valós számok halmazán erős rendezési reláció a '$<$', az emberek halmazán pedig például a 'fiatalabb, mint' reláció.

Megjegyzések

a) Az R relációt az U halmazon *egyértékűnek* mondjuk, ha U bármely a eleme legfőljebb egy (U-beli) elemmel állhat az R relációban, azaz ha

$\forall x \forall y \forall z[(Rxy \ \& \ Rxz) \supset y = z]$.

A *függvények* voltaképpen nem mások, mint egyértékű relációk. Így a függvény fogalma speciális esete a reláció fogalmának.

b) Ha R egy reláció U-n, akkor R *konverzén* azt a relációt értjük, amely éppen akkor áll fenn a és b között, amikor az eredeti reláció fennáll b és a között: ezt az "$R^{\cup}$" szimbólummal szokás jelölni. R és konverze között az alapvető összefüggés:

$\forall x \forall y[R^{\cup}xy \equiv Ryx]$

Ha R szimmetrikus, konverze önmaga. A 'szülője' reláció konverze a 'gyermeke', a 'férje' konverze a 'felesége' a '<' konverze a '>', az 'osztója' konverze a 'többszöröse', a 'testvére' konverze önmaga.

Ellenőrző kérdések

8.1. Mit fejez ki egy azonossági állítás? Mi az igazságfeltétele?

8.2. Mit jelent az, hogy azonosság logikai predikátum?

8.3. Mi a különbség az azonosság és az egyenlőség között?

8.4. Mit mond ki az önazonosság törvénye és Leibniz törvénye?

8.5. Milyen predikátumokra nem alkalmazható a Leibniz-féle felcserélési törvény?

8.6. Hogyan fejezhetjük ki azt, hogy valamiből egy, legföljebb egy, illetve éppen egy van?

8.7. Hogyan fejezhetjük ki azt, hogy egy predikátum terjedelme legalább kételemű, legföljebb kételemű, illetve éppen kételemű?

8.8. Mit értünk azon, hogy egy reláció tranzitív?

8.9. Mikor mondunk egy relációt szimmetrikusnak, illetve aszimmetrikusnak?

8.10. Mit értünk egy reláció reflexivitásán, illetve irreflexivitásán?

8.11. Milyen reláció segítségével létesíthetünk felosztást egy halmazon?

8.12. Ismertesse a rendezési relációkat!

Gyakorló feladatok

8.1. Írjuk föl az alábbi állítások logikai szerkezetét! [8:1,6.]

a) Tokió, amely nem más, mint Japán fővárosa, földrengésveszélyes területen fekszik.

b) A legjobb tizenegyesrúgó a kapus.

c) Juli barátja az igazgató helyettese.
d) Péter volt az, aki megoldotta a feladatot.

8.2. Fejezzük ki szabatosan a következő állítások logikai szerkezetét: [8:6.7.]
a) Antal egyedül vár az autóbuszra.
b) „Csak egy kislány van a világon." (Petőfi S.)
c) „Csak mécsvilágom s honszerelmem ég." (Petőfi S.)
d) A csoportból csak Béla és Csilla vizsgáztak, más senki.
e) Nincs két olyan filozófus, aki teljesen egyetért.
f) Ha két nő beszélget, egy harmadik csuklik.

8.3. Fejezzük ki tömör magyarsággal az alábbi formulák tartalmát: (8.1.)

$$\sim \exists x \forall y[x = y]; \qquad \exists x \exists y[x \neq y]; \qquad \forall x \exists y[x \neq y].$$

8.4. Formalizáljuk a következő állítást: 'Vagy Dezsőhöz megyek feleségül, vagy senkihez.' Mutassuk meg, hogy ez nem mond ellent a következőnek: 'Senkihez nem megyek feleségül.'

8.5. Az alábbi relációk közül melyek reflexívek, szimmetrikusak, illetve tranzitívak? Van-e köztük ekvivalenciareláció?

Merőleges, párhuzamos, ugyanolyan magas, magasabb, egyenlő súlyú, különböző térfogatú, édestestvére, őse, honfitársa, kollégája.

Adjuk meg a relációkhoz alkalmas tárgyalási univerzumot is!

9. A KÖVETKEZMÉNYRELÁCIÓ

E fejezet célja a helyes következtetés ismérveinek végleges megfogalmazása. Azt, hogy egy következtetés *helyes,* úgy fogjuk kifejezni, hogy premisszáinak halmaza és konklúziója között fönnáll a *következményreláció.* A következményreláció, ezek szerint, olyan kétargumentumú reláció, amelynek első argumentuma egy mondathalmaz (a premisszák halmaza), második argumentuma pedig egy mondat (a konklúzió) lehet. Jelölésére a következő sémát használjuk:

$$\mathbf{P} \Rightarrow K,$$

ahol **P** a premisszák halmaza, K pedig a konklúzió.

Ezt a jelölést az 5. fejezet óta használjuk, például

$$\text{(T15)} \quad \{p, p \supset q\} \Rightarrow q.$$

(A premisszákat kapcsos zárójelekkel fogjuk közre, ha számuk több mint egy.)

9.1. STRUKTURÁLÁS, FORMALIZÁLÁS, INTERPRETÁLÁS

Az 1.3. szakaszban a következtetés helyességére vonatkozóan a következő feltételt fogalmaztuk meg: Egy következtetés akkor (és csak akkor) helyes, ha premisszáinak igazsága *szükségszerűen* biztosítja konklúziója igazságát is, és ez a szükségszerűség kizárólag a premisszák és a konklúzió *logikai szerkezetén* és a bennük szereplő *logikai szavak jelentésén* alapul. Ahhoz, hogy ez a feltétel használható legyen, tisztázni kellett a logikai szerkezet és a logikai szó fogalmát. Ahogyan előrehaladtunk a logikai szerkezetek tanulmányozásában és a logikai szavak, illetve az őket ábrázoló szimbólumok megismerésében, úgy egyre több *következtetési sémát* tudtunk megfogalmazni. A bevezetett logikai jelek mindegyike ($\sim$, &, $\vee$, $\supset$, $\equiv$, $\forall$, $\exists$, $=$) alkalmat adott néhány logikai törvény megfogalmazására; ezek némelyike *logikai ekvivalencia,* némelyike pedig *következtetési séma* alakját öltötte. E törvények helyességét mindig a logikai szimbólumok jelentésére (igazságszabályára) alapoztuk. Például a jelen fejezet elején idézett (T15) a kon-

dicionális jelentése (igazságszabálya) alapján helyes. Másik példát is idézve, az előző fejezetben tanult Leibniz-törvény, azaz

(T53) $\{a = b, F(a)\} \Rightarrow F(b)$

az azonosságjel jelentése alapján helytálló.

A következtetési sémák egyik jellemzője, hogy nem szerepelnek bennük igazi mondatok, hanem csak paraméterekből és logikai jelekből állnak. (Ezért nevezzük őket sémáknak.) De e sémák bármelyikét felhasználhatjuk konkrét következtetésre, ha a bennük szereplő paramétereket behelyettesítjük megfelelő típusú kifejezésekkel (és a logikai jeleket is pótoljuk a megfelelő magyar kifejezésekkel). A paraméterek behelyettesítésekor csak a kategóriakorlátok betartására kell ügyelnünk: a mondatparamétereket mondatokkal, a predikátumparamétereket predikátumokkal, a névparamétereket nevekkel szabad helyettesíteni. Így (T15)-ben p és q tetszőleges mondatokkal, (T53)-ban a és b tetszőleges nevekkel, F pedig tetszőleges egyargumentumú (extenzionális) predikátummal helyettesíthető. Ezek szerint minden következtetési séma végtelen sok konkrét következtetés közös vázát szolgáltatja.

Sejthető, hogy az eddig megismert következtetési sémákon kívül a helyes következtetésnek még jó néhány (talán végtelen sok) sémába foglalható esete van. Amikor a helyes következtetés általános definícióját akarjuk megfogalmazni, akkor a következményreláció *összes lehetséges esetét* kell valamilyen módon figyelembe venni.

Az első nehézség ezzel kapcsolatban az, hogy – mint már többször hangsúlyoztuk – egy következtetés helyessége csak a benne szereplő állítások *logikai szerkezetén* múlhat (értsük bele ebbe az előforduló logikai szavak jelentését is). A mondatok természetes nyelvi szerkezete azonban többnyire elrejti a logikai szerkezetüket, sőt azt is tudjuk, hogy a logikai szerkezet szempontjából gyakran föllép a többértelműség esete is. *A logika csak akkor tudja minősíteni* (helyesnek vagy hibásnak) *a következtetést, ha megadjuk a premisszák és a konklúzió logikai szerkezetét.*

E megállapítás alól van egy triviális kivétel: bármely nemüres premisszahalmaznak következménye a premisszahalmaz bármelyik eleme; azaz, az alábbi séma alapján biztosan hibátlanul következtethetünk:

$$\{p_1, \ldots, p_n\} \Rightarrow p_i \; [1 \leq i \leq n; n \geq 1).$$

Ennek helyességében a $p_1, \ldots p_n$ mondatok logikai szerkezete semmiféle szerepet nem játszik. Bár e séma helyes, semmitmondó volta folytán teljesen haszontalan. Csak azért említjük meg, mert a következményreláció (még ezután megfogalmazandó) általános definíciója ezt is magában foglalja.

Eddigi tapasztalatainkból tudjuk, hogy a logikai szerkezet feltárásában kisebb vagy nagyobb mélységig hatolhatunk; szélső esetként az is előfordulhat, hogy valamely premisszát, vagy éppen a konklúziót, teljesen felbontatlanul hagyjuk. Ismerünk már olyan következtetési sémákat, amelyek ezt az esetet illusztrálják. (Lásd például az 5. fejezetben a (T4), (T8), (T12), (T15) törvényeket.) Minthogy a következtetés helyessége a premisszák és a konklúzió logikai szerkezetén múlik, a szerkezet feltárásának mélysége – többértelműség esetén az értelmezés megválasztása – befolyásolhatja azt, hogy a következtetést helyesnek vagy hibásnak minősítjük-e.

Illusztráljuk ezt a következő példával: Nyilván mindenki helyesnek érzi az alábbi 'következtetést':

'Minden hal vízben él. A ponty hal, tehát a ponty vízben él.'

Ha ezt a következtetést mondatparaméterek és mondatfunktorok segítségével írjuk fel, ezt kapjuk:

$$\{p \ \& \ q\} \Rightarrow r$$

Ez a következtetés pedig nem helyes, hiszen lehet a premisszákat igazra, a konklúziót pedig hamisra értékelni. Vagyis a fenti következtetés helyessége más logikai viszonyokon múlik.

Nevezzük *strukturálásnak* azt az eljárást, amelynek során a természetes nyelvi mondatok logikai szerkezetét – kisebb vagy nagyobb mélységig – feltárjuk; az eljárás eredményeként kapott kifejezéseket pedig *strukturált mondatok*nak. Egy strukturált mondatban a természetes nyelvi alkatrészeken kívül logikai jelek is szerepelhetnek (és esetleg az egyértelműséget biztosító zárójelek, valamint kötött változók is). A logikai struktúra fölismerésére, azaz a strukturálásra már eddig is sok példát mutattunk (az 5., 7. és a 8. fejezetben), a gyakorló feladatok között is számos idevágó példa szerepel, és további példák lesznek a következő fejezetben. Ezért most nem szakítjuk meg az elméleti vizsgálódás fonalát azzal, hogy a strukturálást, azaz a logikai szerkezet feltárását példával szemléltessük.

A következményrelációt a strukturált mondatokra fogjuk értelmezni. Definíciónk alapján minden olyan következtetés, amelyben strukturált mondatok szerepelnek, *egyértelműen* helyesnek vagy hibásnak fog minősülni. Ha hibásnak minősül, a logikai szerkezet mélyebb feltárása esetén még helyesnek minősülhet, ahogy ezt az előző példa alapján láttuk, de az már egy másik következtetésnek számít. A következtetés logikai megítélése mindig a ténylegesen föltárt logikai szerkezetekről szól, és nem veszi figyelembe a felbontatlanul hagyott alkatrészek rejtőző logikai szerkezetét.

A strukturálás tehát kijelöli azt a logikai szerkezetet, amelynek alapján a következtetést majd helyesnek vagy hibásnak fogjuk minősíteni. De figyeljünk föl arra, hogy *a minősítés a logikai szerkezeten túl semmi másra nem támaszkodhat.* Tehát nemcsak arról van szó, hogy egy következtetés helyességének megítélése-

kor figyelembe kell venni a logikai szerkezet nyújtotta információt, hanem arról is, hogy ezentúl *semmi más információt nem szabad figyelembe venni.*

Ez azt jelenti, hogy a felbontatlanul hagyott alkatrészek szemantikai értéke nem befolyásolhatja a következtetés helyességét. Ha a strukturált mondatok körében egy következtetést helyesnek minősítünk, annak helyesnek kell maradnia akkor is, ha a felbontatlanul hagyott alkatrészeket más alkatrészekkel helyettesítjük, csupán a kategóriák megőrzéséhez ragaszkodva (azaz mondatot mondattal, predikátumot ugyanolyan argumentumszámú predikátummal, nevet névvel helyettesítve).

E követelmény betartását elősegítheti, ha a premisszákban és a konklúzióban felbontatlanul hagyott alkatrészeket jelentés nélküli szimbólumokkal, nevezetesen paraméterekkel pótoljuk, megőrizve a logikai grammatika kategorizálását. (Ha ezt tesszük, az eredeti mondatok és mondatrészek jelentése már nem zavarja a további vizsgálódást.) Részletezve: A felbontatlan mondatokat mondatparaméterekkel (p, q, r), a neveket névparaméterekkel (a, b, c), a predikátumokat pedig predikátumparaméterekkel (F, G, H) helyettesítjük, természetesen betartva azt, hogy az azonosakat azonos paraméterekkel, a különbözőeket különbözőekkel helyettesítjük. A predikátumok argumentumait, az egységes írásmód kedvéért, írjuk mindig a predikátum után; például Fa, Gab, $Hxay$. (Magától értetődő, hogy ha egy nagyobb egységet – egy mondatot – egyetlen paraméterrel helyettesítünk – mert a strukturálásban felbontatlanul hagytuk –, akkor a benne elhelyezkedő részek helyettesítéséről nem kell gondoskodnunk.) Ezt az eljárást nevezhetjük *formalizálásnak,* az eredményül kapott kvázimondatokat pedig – amelyekben már nincsenek természetes nyelvi szavak– *formulák*nak.

Lássunk ehhez egy illusztrációt. Tegyük föl, hogy az alábbi, természetes nyelven fogalmazott következtetés helyességét óhajtjuk megítélni:

Premissza: Ali mindenkit irigyel.
Konklúzió: Mindenkit irigyel valaki.

A premisszát így strukturálhatjuk:

$\forall y$ [Ali irigyli y-t].

Az állítólagos konklúziót pedig így

$\forall y \exists x$ [x irigyli y-t).

A formalizálásban helyettesítsük 'Ali'-t a-val, a kétargumentumú 'irigyli' predikátumot pedig F-fel. A kapott formulák:

$\forall y.Fay$ (premissza), $\forall y \exists x.Fxy$ (konklúzió).

Történetesen e következtetés helyességét nyomban igazolhatjuk is. Ugyanis (T48) szerint:

$$\forall y.Fay \Rightarrow \exists x \forall y.Fxy,$$

viszont (T46) szerint:

$$\exists x \forall y.Fxy \Rightarrow \forall y \exists x.Fxy.$$

Az adott premisszából tehát két ismert következtetési séma alkalmazásával eljutottunk a feltételezett konklúzióhoz. (De ne gondoljuk azt, hogy minden következtetés ellenőrzése ilyen egyszerű!) Az, hogy az 'Ali' név kit jelöl, s hogy az 'irigyli' predikátum mit jelent (vagy hogy mi a terjedelme), föl sem vetődött.

Az a követelmény, hogy a következtetés helyessége nem függhet a felbontatlan alkatrészektől, most már így fogalmazható: *A következtetés helyessége független attól, hogyan interpretáljuk a felbontatlan alkatrészek helyére lépő paramétereket.*

A végső megfogalmazáshoz tisztáznunk kell, hogy mit értünk a formulákban szereplő paraméterek interpretálásán.

Formulák interpretálása. A formulákban szereplő paramétereket bármikor „visszahelyettesíthetjük" megfelelő kategóriájú természetes nyelvi kifejezésekkel (akár az eredetiekkel, akár másokkal). Ezt az eljárást is interpretációnak nevezhetjük. Amíg az extenzionális logika területén vagyunk, az ilyen nyelvi interpretáció helyett megfelelő lesz az is, hogy csupán *faktuális értékeket* adunk meg a formuláinkban szereplő paraméterekhez, természetesen figyelembe véve grammatikai kategóriájukat. Röviden így fogalmazhatunk: a paramétereket ugyanúgy interpretáljuk, mint a velük azonos kategóriába tartozó értelmes természetes nyelvi kifejezéseket. Részletezve:

(1) Ha formuláinkban predikátumparaméterek is szerepelnek, mindenekelőtt kijelölünk egy nemüres U halmazt mint *tárgyalási univerzumot.*

(2) A predikátumparamétereket *terjedelmük* megadásával interpretáljuk. Ez természetesen függeni fog a predikátum argumentumszámától. Egy n-argumentumú predikátum terjedelme a tárgyalási univerzum elemeiből képezett rendezett n-esek egy részhalmaza lehet. (A predikátumparaméterek argumentumszámát elárulja az őket követő, névkategóriájú alkatrészek száma. Ezen alkatrészek között lehetnek névparaméterek és – kívülről kvantorral lekötött – változók is.)

(3) Névparaméter faktuális értéke a tárgyalási univerzum (U) valamelyik eleme lehet.

(4) Egy mondatparaméter faktuális értékeként a két igazságérték (a 0 és az 1) valamelyike jöhet számításba.

Magasabb rendű logikában más kategóriájú paraméterek is föllépheznek, de ezek interpretálásával itt nem foglalkozunk. Ha a szerkezet feltárása közben intenzionális funktorokat is figyelembe veszünk, az interpretáció során még messzebb kell mennünk: nem elégedhetünk meg a faktuális értékek megadásával, hanem intenziókat is kell a paraméterekhez rendelnünk. De itt ezzel sem foglalkozhatunk.

Megjegyezzük, hogy a felbontatlan alkatrészek paraméterekkel való helyettesítése, vagyis a formalizálás, nem kötelező, csupán segédeszköz, amely azt a célt szolgálja, hogy az egyes alkatrészeket szabadon, természetes nyelvi jelentésüktől elvonatkoztatva interpretáljuk, s jelentésükből csak azt vegyük figyelembe, hogy melyik kategóriába tartoznak. Másképpen: A magyar nyelv értelmes kifejezéseit is tekinthetjük paramétereknek, ha megvan bennünk a lelkierő ahhoz, hogy figyelmen kívül hagyjuk jelentésüket, s csupán grammatikai kategóriájukra emlékezzünk. Ezért aztán ahhoz sem kell ragaszkodnunk, hogy formuláinkban nem lehetnek természetes nyelvi szavak. Lehetnek, ha nem használjuk ki a jelentésüket.

A paraméterek használatának technikai előnye is lehet: Egy hosszabb logikai elemzés tömörebb, áttekinthetőbb, ha anyanyelvünk terjedelmesebb kifejezései helyett betűket szerepeltetünk. Ezt a technikai előnyt majd a következő fejezetben fogjuk méltányolni.

Bár közvetlenül csak a formuláinkban szereplő paramétereket interpretáljuk, az interpretáció révén *igazságértéket* kap minden olyan formula, amely az interpretált paraméterekből (a logikai jelek alkalmazásával) fölépíthető. Ha például F kétargumentumú predikátumparaméter, a és b pedig névparaméterek, akkor az "Fab" formula igazságértéke kiszámítható F, a és b interpretációjából: ha a faktuális értéke u, b faktuális értéke v, úgy "Fab" faktuális értéke akkor és csak akkor 1 (igaz), ha az (u, v) rendezett pár F terjedelmébe tartozik. Egy "$\forall x A$" szerkezetű formula akkor és csak akkor 1 értékű (igaz), ha A értéke 1, bármilyen (U-beli) értéket adunk is az x változónak. Ha egy formula alakja "A & B", akkor igazságértéke kiszámítható A és B igazságértékéből. És így tovább: a logikai konstansok ismert igazságszabályai alapján elvileg bármely összetett kifejezés faktuális értéke kiszámítható alkatrészeinek faktuális értékéből. (Azzal most ne törődjünk, hogy a tényleges kiszámítás gyakorlati kivitelezése egyes interpretációk esetén igen bonyolult feladat lehet. A lényeges az, hogy az elemi alkatrészek – a paraméterek – interpretálása egyértelműen determinálja a belőlük fölépíthető összetett kifejezések faktuális értékét, akár ki tudjuk számítani ténylegesen, akár nem.)

A paraméterek egy interpretációjának rögzítése után tehát már értelmesen kérdezhetjük, hogy egy formulának ezen interpretáció szerint mi az igazságértéke, igaz-e vagy hamis-e. Erre a tényre építjük a következményreláció definícióját.

9.2. KIELÉGÍTHETŐSÉG ÉS KÖVETKEZMÉNY

Kielégíthetőség. Formulák egy nemüres halmazát *kielégíthetőnek* mondjuk, ha a halmaz elemeiben szereplő paramétereket lehet úgy interpretálni, hogy a halmazba tartozó formulák együttesen igazak legyenek. Ha ilyen interpretáció nem lehetséges, akkor a formulahalmazt *kielégíthetetlennek* mondjuk.

Kielégíthetetlen formulahalmazokra egyszerű példák a következők:

$$\{p, \sim p\}; \{p \supset (q \vee r), p, \sim q, \sim r\};$$

$$\{\forall x.Fx, \sim Fa\}; \{\sim (a = a)\}.$$

Az utolsó példában egyelemű formulahalmaz szerepel. Azt is mondhatjuk, hogy maga a "$\sim (a = a)$" formula kielégíthetetlen. Általánosan: ha valamely egyelemű $\{A\}$ formulahalmaz kielégíthető (illetve kielégíthetetlen), akkor egyetlen elemét – magát az A formulát – is kielégíthetőnek (illetve kielégíthetetlennek) mondjuk.

A kielégíthetetlenség a *logikai ellentmondás* szinonimája. Ezért a legegyszerűbb példái: $\{p, \sim p\}$, "$p \,\&\, \sim p$", "$\sim (a = a)$". Ha egy formulahalmaz kielégíthetetlen, akkor elemei nem lehetnek együttesen igazak (bárhogyan interpretáljuk is őket), éspedig pusztán logikai szerkezetük alapján. Ha viszont egy formulahalmaz kielégíthető, akkor elemeinek együttes igazságát a logika törvényei nem zárják ki (lehet úgy interpretálni őket, hogy együttesen igazak legyenek).

Két egyszerű tény a kielégíthetőségről:

(a) *Ha egy formulahalmaz kielégíthető, akkor annak minden részhalmaza is kielégíthető.*

Ez nyilvánvalóan igaz, hiszen egy formulahalmazt akkor mondunk kielégíthetőnek, ha van olyan interpretáció, amely a halmaz minden elemét együtt igazzá teszi. Ám ugyanezen interpretáció szerint az eredeti formulahalmaz minden részhalmazának elemei is igazzá lesznek.

(b) *Ha egy formulahalmaz kielégíthetetlen, akkor bármely bővítése is kielégíthetetlen.*

Persze, hiszen ha a bővebb halmaz kielégíthető volna, akkor – az előző tétel szerint – minden része s így a kiinduló formulahalmaz is kielégíthető lenne, noha abból indultunk ki, hogy az kielégíthetetlen.

Két halmaz, H_1 és H_2, *egyesítését* a

$$H_1 \cup H_2$$

kifejezéssel jelöljük. Ha **P** egy formulahalmaz, A pedig egy formula, akkor

$$\mathbf{P} \cup \{A\}$$

nem más, mint **P** kibővítése A-val. (Ha véletlenül A már **P** elemei között is szerepel, akkor persze ez a „bővítés" nem valódi.)

A következményreláció definíciója. *Azt mondjuk, hogy a* **P** *formulahalmaznak logikai következménye a K formula, ha a*

$$\mathbf{P} \cup \{\sim K\}$$

formulahalmaz kielégíthetetlen (azaz: nem elégíthető ki az a formulahalmaz, amelyet úgy kapunk, hogy **P**-hez hozzávesszük K negációját). Jelölése: $\mathbf{P} \Rightarrow K$, mint a fejezet elején már jeleztük.

Ha **P**-nek következménye K, akkor nincs olyan interpretáció, amely **P** minden elemét igazzá, a K konklúziót pedig hamissá teszi. (Hiszen ha lenne ilyen interpretáció, akkor $\mathbf{P} \cup \{\sim K\}$ kielégíthető lenne.) Következésképp minden olyan interpretáció, amely valamennyi premisszát igazzá teszi, és interpretálja a konklúziót is, a konklúziót is csak igazra értékelheti. Így a premisszák igazsága szükségszerűen maga után vonja, hogy a konklúzió sem lehet hamis, és ebben semmi szerepe nincs annak, hogy mit jelentenek a nem logikai alkatrészek, a paraméterek; hiszen bárhogyan interpretáljuk is őket – azaz bármilyen jelentést tulajdonítunk is nekik –, nem fordulhat elő, hogy a premisszák mind igazak, a konklúzió pedig hamis. Egyedül a formulák szerkezete és a bennük előforduló logikai jelek jelentése az, ami a következményreláció fönnállását biztosítja.

Ezzel beláttuk, hogy az általunk értelmezett következményreláció eleget tesz a legszigorúbb követelményeknek: szükségszerű, tisztán logikai, s a nemlogikai alkatrészek tekintetében közömbös.

A következményrelációnak a gyakorlatban hasznos esetei nyilvánvalóan azok, amelyekben a premisszák **P** halmaza is kielégíthető, a konklúzió negációja, "$\sim K$" is kielégíthető, de a kettő együttesen – azaz $\mathbf{P} \cup \{\sim K\}$ – már kielégíthetetlen. A következményreláció definíciója azonban nem tartalmaz ennek megfelelő előírásokat. Nézzük, mi történik, ha például már a premisszák **P** halmaza kielégíthetetlen, azaz logikailag ellentmondásos.

A föntebbi (b) tétel szerint egy kielégíthetetlen formulahalmaz bármely bővítése is kielégíthetetlen. Ezért: ha a **P** premisszahalmaz kielégíthetetlen, akkor bárhogyan választva is a K „konklúziót", $\mathbf{P} \cup \{\sim K\}$ is kielégíthetetlen, azaz – a következményreláció definíciója értelmében – $\mathbf{P} \Rightarrow K$ teljesül. Szavakban:

Kielégíthetetlen (azaz ellentmondásos) premisszahalmazból bármilyen konklúzió következik. (Ez persze azt is jelenti, hogy bármely konklúzióval együtt annak tagadása is következik.)

Ha viszont a premisszahalmaz kielégíthető, akkor nem fordulhat elő, hogy egy formula is és annak negációja is következik belőle. Hiszen ha $\mathbf{P} \Rightarrow K$, azaz $\mathbf{P} \cup \{\sim K\}$ kielégíthetetlen, akkor egyetlen olyan interpretáció sincs, amely **P** minden elemét és "$\sim K$"-t is igazzá teszi. De ha van olyan interpretáció, amely **P** elemeit igazzá teszi, és ez interpretálja a K-ban szereplő paramétereket is, akkor "$\sim K$"-hoz a hamis értéket kell hogy rendelje. De akkor K-hoz az igaz értéket kell rendelnie.

Ezzel pedig beláttuk, hogy kielégíthető premisszahalmazból nem következik minden formula. Tehát:

Egy premisszahalmazból akkor, de csak akkor következik minden formula, ha a premisszahalmaz kielégíthetetlen.

Így aztán, ha következtetéseink során azt tapasztaljuk, hogy egy premisszahalmazból egy formula és annak a negációja is következik, akkor ez kellő alapot nyújt arra, hogy az adott premisszahalmazt többé ne használjuk, hiszen nyilván kielégíthetetlen, a benne szereplő állítások egymásnak ellentmondó információkat tartalmaznak.

Lehetséges, hogy valaki a következményreláció ezen tulajdonságát zavarónak találja, és azt szeretné, ha ellentmondó formulapárból mégsem lehetne akármire következtetni, s elutasítható lenne példának okáért az alábbi következtetés:

Premisszák: (1) Füles nagyképű,
(2) Füles nem nagyképű,
Konklúzió: (3) Micimackó utálja a mézet.

Minthogy (2) éppen (1) negációja, (1) és (2) kielégíthetetlen formulahalmazt alkotnak, tehát – definíciónk értelmében – valóban következik belőlük (3). Csakhogy Füles nagyképűsége – vagy annak hiánya – semmiféle kapcsolatban nincs Micimackó és a méz viszonyával, független tőle. Azt mondhatjuk, hogy itt a premisszák irrelevánsok a konklúzió szempontjából. Az irrelevancia esetünkben abban is megnyilvánul, hogy a konklúzióban szereplő alkatrészek nem szerepelnek a premisszákban. Ez lehetővé teszi, hogy egy erősebb következményrelációt is értelmezzünk, amelynek értelmében irreleváns konklúzióra nem következtethetünk.

Erős következmény. *Azt mondjuk, hogy a* **P** *formulahalmaznak erős következménye a K formula, ha* **P** *minden interpretációja K-nak is interpretációja, és* $\mathbf{P} \cup \{\sim K\}$ *kielégíthetetlen.*

Miben tér el az erős következményreláció a korábban értelmezettől? Abban, hogy ha a konklúzióban szerepel olyan nemlogikai alkatrész, amely a premisszák egyikében sem fordul elő, akkor lehet olyan interpretációt adni a premisszákhoz, amely a konklúziót nem interpretálja. Így egy ellentmondást tartalmazó formulahalmazból sem lehet tetszőleges – esetleg irreleváns – konklúzióra következtetni. Példának okáért (1)-nek és (2)-nek *nem* erős következménye (3).

Ha $\mathbf{P} \Rightarrow K$ fennáll az eredeti értelemben, akkor könnyű eldönteni, hogy fennáll-e az *erős* értelemben is: ehhez csak az szükséges, hogy K minden felbontatlan (nem logikai) alkatrésze szerepeljen a **P** premisszahalmaz elemeiben is. Mivel ez tisztán szövegvizsgálattal eldönthető, az erős következményrelációval nem szükséges tovább foglalkoznunk. A hátralévő fejtegetésekben tehát a következményrelációt mindig az eredeti definíció szerint értsük.

A következtetés helyessége természetes nyelven fogalmazott állítások körében. A következményrelációt a *formulák* körében definiáltuk. Tudjuk, hogy struk-

turált mondatokból úgy nyerhetünk formulákat, hogy a felbontatlan alkatrészeket (megfelelő kategóriájú) paraméterekkel helyettesítjük. Megjegyeztük, hogy ez a lépés nem lényeges: megtarthatjuk a természetes nyelv (esetünkben a magyar) szavait, ha elfelejtkezünk jelentésükről, és szabadon interpretálhatóknak tekintjük őket, mintha paraméterek lennének. Ez azt jelenti, hogy a következményrelációt valójában a *strukturált mondatokra* is értelmeztük.

Strukturálatlan mondatokra azonban a következményreláció definíciója közvetlenül nem alkalmazható, illetve legfeljebb abban az elfajuló formában értelmezhető, hogy valamennyi premisszát és a konklúziót is egy-egy mondatparaméternek fogjuk föl. De az utóbbi esetben csaknem mindig azt tapasztalnánk, hogy a következményreláció nem áll fönn. (Egyetlen kivétel: a konklúzió szerepel a premisszák között. Ezt említettük már 9.1.-ben, egy apró betűs megjegyzésben.)

Természetes nyelven fogalmazott állítások körében egy következtetést akkor minősíthetünk helyesnek, ha a következtetésben szereplő mondatokat lehet úgy strukturálni (formalizálni), *hogy helyes következtetést kapjunk* (a következményreláció megadott definíciója értelmében).

Előfordulhat, hogy valamely premisszánk (vagy a vélt konklúzió) szerkezetileg nem egyértelmű. (Például nem világos egy tagadószó vagy egy kvantorszó hatóköre, az 'és' és a 'vagy' sorrendje stb.) Ekkor a mondat strukturálása során kiválasztunk egy lehetséges olvasatot. Más olvasat esetén másképp alakulhat a logikai szerkezet is. Így megeshet, hogy arra a kérdésre: Helyes-e a következtetés? – esetleg így kell válaszolnunk: A mondatok egy bizonyos olvasata mellett helyes, egy másik olvasata mellett nem helyes. De ha már észrevesszük a szerkezeti többértelműséget, akkor a legjobb, ha átfogalmazással megszüntetjük, miáltal az eredeti feladatunk két (vagy több) feladatra bomlik. Például a 'Minden fiú hazakísért egy leányt' mondatban nem világos az univerzális és az egzisztenciális kvantorkifejezés sorrendje: egyazon lányt kísértek haza a fiúk, vagy esetleg különböző fiúk különböző lányokat? Így két strukturálás lehetséges:

$$\exists y[Ly \ \& \ \forall x(Fx \supset Hxy)], \text{ és } \forall x[Fx \supset \exists y(Ly \ \& \ Hxy)],$$

ahol a 'fiú', 'leány', 'hazakísér' predikátumokat rendre az *F, L, H* paraméterekkel helyettesítettük.

Megeshet, hogy *a logikai elemzés egy adott szintjén* nem állnak rendelkezésre olyan eszközök, amelyek a következtetésben szereplő mondatok szerkezetének kellő mélységű feltárását lehetővé tennék, s így egy ténylegesen helyes következtetésről nem tudjuk kimutatni annak helyességét. Így a klasszikus elsőrendű logika sem teszi lehetővé, hogy *valamennyi* helyes következtetésről igazolhassuk, hogy valóban helyes; de a tudományos gyakorlat és a pedagógia céljaihoz szükséges következtetések döntő többségének helyességét ki tudjuk mutatni e keretben.

A következményreláció e szakaszban adott definíciójának érvényessége a klasszikus elsőrendű logikán túl minden olyan bővebb logikai rendszerre is kiterjed, amely megőrzi az ellentmondástalanság és a kizárt harmadik elvét. (Azzal a természetes kiegészítéssel, hogy a bővebb elméletben bővebb az interpretáció fogalma is.).

9.3. LOGIKAI IGAZSÁG ÉS EKVIVALENCIA

Logikai igazság. Egy formulát *érvényesnek* vagy *logikai igazságnak* mondunk, ha minden interpretációban igaz, azaz ha nem lehet hamisra interpretálni. Világos, hogy *egy formula akkor és csak akkor érvényes, ha a negációja kielégíthetetlen.* Azt, hogy az A formula érvényes, a

(4) $\Rightarrow A$

jelöléssel is közölhetjük.

Az 5.5. és a 8.2. szakaszban már láttunk példákat logikai igazságokra: az azonosság (T51), (T52), (T54) törvényei a logikai igazságok közé tartoznak. Ugyanott megismerkedtünk az iménti jelöléssel is. Ha egy formula logikai igazság, a paramétereinek behelyettesítésével nyert állítást is logikai igazságnak vagy érvényes állításnak mondjuk.

Logikai igazságra a korábban már említett egyszerű példák:

(5) $\Rightarrow (p \vee \sim p), \quad \Rightarrow (p \supset p).$

Akár igaz, akár hamis mondatot gondolunk is p helyébe, "$p \vee \sim p$" és "$p \supset p$" mindenképpen igaz lesz, a '$\vee$', '$\sim$', '$\supset$' logikai jelek igazságszabályai (azaz az alternáció, a negáció és a kondicionális definíciója) alapján. A behelyettesítéssel nyert mondatok is *logikai szerkezetük alapján* igazak (bár semmitmondóak), mint például:

Péter eljön, vagy Péter nem jön el.
Ha fúj a szél, fúj a szél.

Az (5) alatti logikai igazságok első látásra semmitmondóknak tűnhetnek, hiszen „a világról" nem szolgáltatnak információt. Valójában nem semmitmondók, hiszen az alternáció és a negáció kapcsolatáról, illetve a kondicionálisról lényeges információt szolgáltatnak. Nem szólnak ugyan a világról, de szólnak a világ leírására szolgáló nyelv logikai törvényeiről. Ez indokolja a logikai igazság elnevezést. Természetesen nemcsak ilyen, könnyen átlátható logikai igazságok vannak, hanem olyanok is, amelyeknek belátása jelentős gondolati munkát igényel. (Ilyenre később mutatunk példát.)

A logikai igazságok érdekes kapcsolatban vannak a következményrelációval. Olvassuk el újra az előző szakaszban "$\mathbf{P} \Rightarrow K$" definícióját. Észrevehetjük, hogy a definíció nem tiltja el azt, hogy a $\mathbf{P}$ premisszahalmaz üres legyen. Az üres halmazt a '$\varnothing$' szimbólummal jelölve, vizsgáljuk meg, van-e valami értelme annak, hogy

(6) $\varnothing \Rightarrow K,$

azaz hogy a K konklúzió az üres premisszahalmazból következik. A következményreláció definíciója szerint a (6) alatti összefüggés akkor és csak akkor áll fenn, ha az

(7) $\varnothing \cup \{\sim K\}$

formulahalmaz *kielégíthetetlen.* Világos azonban, hogy

$\varnothing \cup \{\sim K\} = \{\sim K\}$.

(Az üres halmazt bármely H halmazzal egyesítve, eredményül H-t kapjuk.) Tehát (7) kielégíthetetlensége nem más, mint "$\sim K$" kielégíthetetlensége. Ezek szerint (6) akkor és csak akkor áll fenn, ha "$\sim K$" kielégíthetetlen, azaz amikor K logikai igazság (hiszen egy formula akkor és csak akkor logikai igazság, ha a negációja kielégíthetetlen). Összegezve:

(8) $\varnothing \Rightarrow K$ akkor és csak akkor, ha K logikai igazság.

Másképp: *a logikai igazságok az üres premisszahalmaz következményei.* Ha jól meggondoljuk, e megfogalmazásban nincs semmi meghökkentő. A logikai igazság „megáll a saját lábán" – ahogy ezt már 5.5.-ben említettük –, nincs szüksége semmi premisszára, tehát már az üres premisszahalmazból is „következik". A (8) összefüggés megmagyarázza a logikai igazság (4) alatti jelölését is:

"$\varnothing \Rightarrow A$" helyett ezt írjuk: "$\Rightarrow A$",

vagyis a '$\Rightarrow$' bal oldalán elhagyjuk az üres halmaz jelének kiírását.

Ha $\mathbf{P}_1 \cup \{\sim K\}$ kielégíthetetlen, és $\mathbf{P}_2$ egy bővítése $\mathbf{P}_1$-nek, akkor $\mathbf{P}_2 \cup \{\sim K\}$ is kielégíthetetlen (az előző szakasz (b) tétele szerint). Ennélfogva: ha $\mathbf{P}_1 \Rightarrow K$ fönnáll, akkor $\mathbf{P}_2 \Rightarrow K$ is fönnáll, hacsak $\mathbf{P}_2$ bővebb, mint $\mathbf{P}_1$. Másképp: *Ami egy premisszahalmaznak következménye, az bármely bővebb premisszahalmaznak is következménye.*

A logikai igazságok már az üres premisszahalmazból következnek, ezért – az iménti megállapítás alapján – bármely *bővebb,* azaz bármely *nem üres* premisszahalmazból is következnek (hiszen minden nem üres halmaz „bővítése" az üresnek). Azaz:

Ha A logikai igazság, akkor tetszőleges **P** *premisszahalmazt véve, fönnáll a* $\mathbf{P} \Rightarrow A$ *következményreláció.*

Vizsgálódásaink eredményeként *a logikai igazság a logikai következményreláció speciális esetének bizonyult.*

Logikai ekvivalencia. Ha fönnáll valamely

(9) $A \Leftrightarrow B$

logikai ekvivalencia, akkor A és B igazságértéke minden interpretációban megegyezik, tehát lehetetlen olyan interpretáció, melyben A igaz, B pedig hamis, és olyan is lehetetlen, melyben B igaz és A hamis. (Lásd a logikai ekvivalencia értelmezését az 5.3. szakaszban.) Így (4) esetén az

$\{A, \sim B\}$, $\{B, \sim A\}$

halmazok kielégíthetetlenek, azaz – a következményreláció definíciója folytán fönnáll:

(10) $A \Rightarrow B$ és $B \Rightarrow A$.

Fordítva is: ha a (10) alatti összefüggések fönnállanak, akkor lehetetlen olyan interpretáció, amelyben A és B igazságértéke különböző, tehát akkor fönnáll (9) is. Összegezve:

Két formula akkor és csak akkor ekvivalens egymással logikailag, ha kölcsönösen következményei egymásnak:

$A \Leftrightarrow B$ akkor és csak akkor, ha $A \Rightarrow B$ és $B \Rightarrow A$.

Ezek szerint a *logikai ekvivalencia is speciális esete a következményrelációnak.*

Az e szakaszban elért eredmények lehetővé teszik a *logikai törvény* fogalmának értelmezését:

*Logikai törvények a következményreláció törvényei; legegyszerűbb eseteit "***P** $\Rightarrow$ *K" szerkezetű következtetési sémák alakjában fejezzük ki.*

Előző fejtegetéseink alapján a logikai ekvivalenciák és a logikai igazságok is logikai törvényeknek számítanak, hiszen speciális esetei a következményrelációnak.

Megjegyzés. A következményreláció végtelen sok törvénye közül kiválasztható véges számú „alaptörvény" úgy, hogy ezekből a klasszikus elsőrendű logika minden helyes következtetési sémája leszármaztatható. Az említett „alaptörvények" listája azonban többféle módon is összeválogatható, vagyis a következményrelációnak nincsenek abszolút „alaptörvényei".

A logikai törvények azonban lehetnek olyan összetett állítások is, amelyekben alkatrészként szerepelnek következtetési sémák. Egyszerű példa erre:

Ha $A \Rightarrow B$ és $B \Rightarrow C$ akkor $A \Rightarrow C$.

(Az olvasóra bízzuk e kis tétel könnyű bizonyítását.) A továbbiakban néhány ilyen összetett logikai törvényt fogalmazunk meg és bizonyítunk.

Logikai igazságra kevésbé átlátszó példa a következő:

(11) $\Rightarrow (p \supset (q \supset r)) \equiv ((p \,\&\, q) \supset r)$.

Az 5. fejezetben találkoztunk a (T20) törvénnyel:

(T20) $p \supset (q \supset r) \Leftrightarrow (p \,\&\, q) \supset r$.

E szerint "$p \supset (q \supset r)$" és "$(p \,\&\, q) \supset r$" igazságértéke mindig (minden interpretációban) azonos. De akkor a belőlük képzett bikondicionális mindig (minden interpretációban) igaz, s éppen ezt állítja (11).

Általánosítva:

Két formula akkor és csak akkor ekvivalens logikailag, ha a belőlük képzett bikondicionális logikai igazság. Másképp: "$A \Leftrightarrow B$" ugyanazt állítja, mint "$\Rightarrow A \equiv B$".

Tegyük föl most, hogy

(12) $\mathbf{P} \cup \{A\} \Rightarrow B$,

ahol **P** egy formulahalmaz (esetleg üres), A és B pedig egy-egy formula. Lehetséges-e ekkor olyan interpretáció, amely szerint **P** minden eleme igaz, de az "$A \supset B$" kondicionális hamis?

"$A \supset B$" csak úgy lehetne hamis, ha A igaz, B pedig hamis lenne. De a (12) föltevésünk folytán: ha **P** minden eleme és még A is igaz, akkor B nem lehet hamis. Tehát nincs olyan interpretáció, amely **P** minden elemét igazzá, "$A \supset B$"-t pedig hamissá teszi. Azaz, (12) esetén

(13) $\mathbf{P} \Rightarrow A \supset B$

is fennáll.

Vizsgáljuk meg a fordított irányú összefüggés lehetőségét is. Azaz, tegyük föl a (13) alatti következményreláció fönnállását, és nézzük meg: lehetséges-e olyan interpretáció, amelyben **P** minden eleme és még A is igaz, de B hamis? Ha lenne ilyen interpretáció, akkor ebben "$A \supset B$" hamis lenne (hiszen A igaz és B hamis), miközben **P** minden eleme igaz; s ez cáfolná a (13) alatti következtetést. Tehát: ha (13) helyes, akkor lehetetlen $\mathbf{P} \cup \{A\}$ minden elemét igazra és ugyanekkor B-t hamisra interpretálni, vagyis ekkor a (12) következtetés is helyes. Összefoglalva: Valamely

$\mathbf{P} \cup \{A\} \Rightarrow B$

következtetés akkor és csak akkor helyes, amikor a

$\mathbf{P} \Rightarrow A \supset B$

következtetés. A szakirodalom ezt az összefüggést a *dedukciótétel* elnevezéssel tisztelte meg.

Tegyük föl, hogy a **P** premisszahalmaz üres. Ekkor a dedukciótétel a következő alakot ölti:

(14) $A \Rightarrow B$ akkor és csak akkor, ha $\Rightarrow A \supset B$.

Szavakban:

Egypremisszás következtetés akkor és csak akkor helyes, ha a belőle képezett kondicionális (melyben az előtag a premissza és az utótag a konklúzió) logikai igazság.

Ha premisszáink száma véges (de egynél nagyobb), akkor konjunkcióval egyetlen premisszát képezhetünk belőlük, azaz:

$\{C_1, C_2, \ldots, C_n\} \Rightarrow A$ akkor és csak akkor, ha
$C_1 \& C_2 \& \ldots \& C_n \Rightarrow A$.

Ez kézenfekvő, hiszen a premisszák együttes igazsága egyenértékű konjunkciójuk igazságával. Ez az átalakítás csak akkor nem megy, ha a premisszák halmaza végtelen (hiszen végtelen sok tagú konjunkció mint grammatikai egység nem létezik). Ám végtelen premisszahalmaz csak matematikai következtetésekben szokott előfordulni. A „nem matematikai" esetekben tehát minden következtetés átalakítható egypremisszássá. Az utóbbiak pedig, a (14) összefüggés szerint, logikailag igaz kondicionálisokba transzformálhatók. Így:

$\{C_1, C_2, \ldots, C_n\} \Rightarrow A$ akkor és csak akkor, ha
$\Rightarrow (C_1 \& C_2 \& \ldots \& C_n) \supset A$.

A következményreláció e fejezetben adott definíciója nem ad praktikus tanácsokat arra, hogy hogyan ellenőrizhetjük egy (feltételezett) következtetés helyességét. Annyit mindenesetre tudunk, hogy "$\mathbf{P} \Rightarrow A$" akkor és csak akkor áll fenn, ha a $\mathbf{P} \cup \{\sim A\}$ formulahalmaz *kielégíthetetlen.* Ezek szerint elég lenne olyan módszerrel rendelkeznünk, amelynek segítségével (legalább) bármely véges formulahalmazról el tudjuk dönteni, hogy kielégíthető-e. A következőkben ilyen módszereket fogunk keresni.

Ellenőrző kérdések

9.1. Mit értünk a mondatok strukturálásán?

9.2. Mit értünk formalizáláson? Mik az előnyei?

9.3. Mit értünk egy formulahalmaz interpretálásán az extenzionális logikában? Hogyan „számítható ki" egy interpretált formula igazságértéke?

9.4. Mit értünk egy formulahalmaz kielégíthetőségén, illetve kielégíthetetlenségén? Mi a szemléletes jelentésük e kifejezéseknek?

9.5. Ismertesse a következményreláció értelmezését!

9.6. Mit tudunk egy kielégíthetetlen premisszahalmaz következményeiről?

9.7. Hogyan értelmezzük a helyes következtetést a természetes nyelven fogalmazott állítások körében?

9.8. Hogyan értelmezhetünk egy erősebb következményrelációt? Miben különbözik ez a következményreláció eredeti definíciójától?

9.9. Mi a kapcsolat a logikai igazság (érvényesség) és a következményreláció között?

9.10. Mi a kapcsolat a logikai ekvivalencia és a következményreláció között?

9.11. Ismertesse a dedukciótételt és indokolását!

9.12. Mit értünk általánosan logikai törvényen?

Gyakorló feladatok

9.1. Igazoljuk a következményreláció tranzitivitását, vagyis azt, hogy ha $\mathbf{P} \Rightarrow A$ és $A \Rightarrow B$, akkor $\mathbf{P} \Rightarrow B$. (Itt $\mathbf{P}$ tetszőleges formulahalmaz, A és B pedig tetszőleges formulák.) [9.5.]

9.2. Igazoljuk a következményreláció alábbi törvényeit:

a) Ha $\mathbf{P} \Rightarrow A$, és $\mathbf{P} \Rightarrow B$, akkor $\mathbf{P} \Rightarrow A \,\&\, B$.

b) Ha $A \Rightarrow C$, és $B \Rightarrow C$, akkor $(A \vee B) \Rightarrow C$.

(Itt $\mathbf{P}$ tetszőleges formulahalmaz, A, B és C pedig tetszőleges formulák.)

10. A KÖVETKEZTETÉS ELLENŐRZÉSÉNEK MÓDSZEREI

Az előző fejezetet azzal az ígérettel zártuk, hogy módszereket fogunk keresni a formulahalmazok kielégíthetőségének vizsgálatára. Mivel egy következtetés helyességének problémája mindig visszavezethető egy formulahalmaz kielégíthetőségének problémájára, a kielégíthetőséget eldöntő módszer egyben a következtetés helyességének eldöntésére is alkalmas.

A keresett módszernek olyannak kell lennie, hogy – legalábbis bizonyos típusú formulák körében – tetszőleges formulahalmazhoz

(a) megadjon egy alkalmas interpretációt, ha a formulahalmaz kielégíthető,

(b) az ellenkező esetben pedig egyértelműen mutassa ki, hogy lehetetlen olyan interpretáció, amely a formulahalmaz minden elemét igazzá teszi.

E fejezetben ilyen módszereket fogunk ismertetni.

10.1. AZ ANALITIKUS TÁBLÁZAT MÓDSZERE

Vannak olyan következtetések, amelyek helyességének igazolásához elegendő a premisszákban és a konklúzióban szereplő *igazságfunktorokat* figyelembe venni (a predikátumok, a nevek és a kvantorok feltárása nélkül). Megmutatjuk, hogy e körön belül univerzális módszer létezik a következtetés helyességének eldöntéséhez (s egyben a kielégíthetőség eldöntéséhez is). Az eljárást példák keretében mutatjuk be.

A módszer alkalmazását azzal kezdjük, hogy kijelöljük a szereplő állításokban – a premisszákban és a konklúzióban – az igazságfunktorokat, majd a felbontatlanul maradt mondatokat mondatparaméterekkel (p, q, r stb.) helyettesítjük. (Ügyeljünk arra, hogy ahol szükséges, kitegyük az egyértelműséget biztosító zárójeleket.) Ezután már az eredeti állítások helyett az így kapott formulákkal kell foglalkoznunk.

1. példa. Vizsgáljuk meg az alábbi következtetés helyességét:

Premisszák: Lujza magyart vagy történelmet vagy németet tanít.
Ha Lujza magyart tanít, németet is tanít.
Lujza nem tanít történelmet.

Konklúzió (?): Lujza tanít németet.

Helyettesítsük paraméterekkel a legegyszerűbb részmondatokat, az alábbi szótár szerint:

p: Lujza tanít magyart;
q: Lujza tanít történelmet;
r: Lujza tanít németet.

A három premissza szerkezete:

(1) $p \vee q \vee r,\ p \supset r,\ \underline{\sim q.}$

A konklúzió pedig *r*.

A következő fázisban szisztematikusan megvizsgáljuk, hogy a premisszákhoz hozzáfűzve a konklúzió *negációját,* a kapott formulahalmaz *kielégíthető-e.* (Ha nem, akkor a következtetés helyes, ha igen, akkor a következtetés hibás, vagy legalábbis ezen a szinten – csak az igazságfunktorok feltárásával – nem igazolható.) A vizsgálathoz elkészítjük formuláink ún. *analitikus táblázatát.* Ezt a következő módon végezzük.

(a) Felírjuk egymás alá a premisszákat és a konklúzió negációját. Ez lesz a táblázat kezdete. A táblázatot majd újabb sorok hozzáírásával – felülről lefelé haladva – folytatjuk.

Példánkban – felhasználva az (1) alatti adatokat – az analitikus táblázat így kezdődik:

(2) 1. $p \vee q \vee r$
2. $p \supset r$
3. $\sim q$
4. $\sim r$

A 4. sorba a konklúzió negációját írtuk.

(b) Megvizsgáljuk valamely már felírt sor igazságfeltételeit, és a táblázat meghosszabbításaként felírjuk azokat a formulákat, amelyeknek igazaknak kell lenniök ahhoz, hogy a vizsgált sorban szereplő formula igaz lehessen. Ezeket az új sorokat a vizsgált sor származékainak mondjuk. A származékok meghatározásakor csak a vizsgált formula fő *szerkezetét* vesszük figyelembe, de ennek részletezésére később még visszatérünk.

Alkalmazzuk (b)-t a (2) alatt megkezdett táblázat 1. sorára. Ez egy háromtagú alternáció; igazságának föltétele: a három tag valamelyikének igaznak kell

lennie. Ez három alternatív (vagylagos) esetet jelent, s mindegyiket figyelembe kell vennünk (hiszen a kielégíthetőség minden lehetőségét meg kell vizsgálnunk). Ezért a táblázatot úgy folytatjuk, hogy – függőleges választóvonalak beiktatásával – háromfelé ágaztatjuk, és a három ágon rendre fölvesszük az alternáció egy-egy tagját; így:

(3) 1. $p \vee q \vee r$
2. $p \supset r$
3. $\sim q$
4. $\sim r$
5. $p \mid q \mid r$

Észrevehetjük, hogy az 5. sorban a középső ágon fölvett q és a 3. sorban szereplő '$\sim q$' *ellentmondást* alkot: nem lehet mindkettő igaz. Ez az alternatíva tehát megvalósíthatatlan. Ugyanígy ellentmondást alkot az 5. sor jobb szélső ágában fölvett r és a 4. sorban látható '$\sim r$' is. Ezek szerint a középső és a jobb szélső ágak alternatívái lehetetlenek. Velük nem kell tovább foglalkoznunk: az ág végére tett csillaggal (*) jelöljük ellentmondásosságukat, *zártságukat:*

(4) 5. $p \mid \underset{*}{q} \mid \underset{*}{r}$

Így már csak a bal szélső ággal kell tovább foglalkoznunk. De előbb foglaljuk össze a tapasztalatokat:

(c) Egyes formuláknak – például egy alternációnak – alternatív igazságföltételei és ennek megfelelően alternatív származékai vannak. Ezek felírásakor a táblázatot ágakra bontjuk. Ez az eset ismétlődhet, így az ágak is elágazhatnak.

(d) Az analitikus táblázat minden ágának kezdeteként a táblázat első sorát tekintjük (nem az elágazás kezdetét!). Ha valamely ág két sorában ellentmondó pár (A és "$\sim A$") szerepel, az ágat zártnak mondjuk, és az ág végét csillaggal jelöljük. A nem zárt ágat *nyitottnak* mondjuk.

A (b) szabályt a táblázat minden olyan sorára alkalmazhatjuk, amelyben kétargumentumú igazságfunktor a fő szerkezet. A mi példánkban a 2. sorban (lásd (2) vagy (3) alatt) a '$p \supset r$' kondicionálist találjuk. Ennek származékait írhatjuk a táblázat 6. sorába. Mivel

$$(p \supset r) \Leftrightarrow (\sim p \vee r),$$

világos, hogy itt is *alternatív* származékokkal van dolgunk; ezek '$\sim p$' és r. (Másképp: egy kondicionális akkor és csak akkor igaz, ha előtagja hamis, vagy ha utótagja igaz; de ahelyett, hogy előtagja hamis, azt mondhatjuk, hogy az előtag negációja igaz. A negáció felhasználásával bármely hamisság-előírást átfogalmazhatunk igazság-előírássá.) A (4) alatt ábrázolt 5. sorhoz a 6. sort így fűzzük hozzá:

5.	p	q	r
6.	$\sim p$ | r	*	*

(Ha az 5. sor másik két ága nem lenne zárt, azokat is ketté kellene ágaztatnunk '$\sim p$' és r alternatív fölvételével.) Vegyük észre, hogy az 5. sorbeli p ellentmond a 6. sor egyik ágán '$\sim p$'-nek, a 4. sorbeli '$\sim r$' pedig a 6. sor másik ágán r-nek. Így a most bevezetett két ág mindegyike zárt; csillagot tehetünk a végükre:

5.	p	q	r
6.	$\sim p$ | r	*	*
	* | *		

Táblázatunknak összesen négy ága keletkezett, de mindegyik zárt. Ez arról tanúskodik, hogy a (2) alatti kiinduló formulahalmaz kielégíthetetlen (hiszen az igazságföltételek keresése során minden alternatívában ellentmondásra bukkantunk). Ennélfogva a *vizsgált következtetés helyes* (mert a premisszákhoz hozzáfűzve a konklúzió negációját, kielégíthetetlen formulahalmazt kaptunk).

Lássuk egészében a kész táblázatot *(1. táblázat):*

1. táblázat

1.			$p \vee p \vee r$		Pr + $\sim$ K (1–4. sor)
2.			$p \supset r$		
3.			$\sim q$		
4.			$\sim r$		
5.		p [1]	q [1]		r [1]
6.	$\sim p$ [2]	r [2]	*		*
	*	*			
	(5,6)	(4,6)	(3,5)	(4,5)	
	1. ág	2. ág	3. ág	4. ág	

A származékok mellett zárójelek között feltüntettük annak a sornak a számát, amelyből származnak. Így az 5. sorban az első sor számát, a 6. sorban pedig a 2. sor számát jeleztük. Ezt az eljárást folytatjuk a továbbiakban is. A jobb szélen a '**Pr** + $\sim$ *K*' jelölés arra utal, hogy e sorokban szerepelnek a premisszák és a negált konklúzió. Alatta zárójelben jelezzük a formulák számát.

Foglaljuk össze a tanulságot is:

(e) Ha egy formulahalmaz analitikus táblázatának minden ága zárt, akkor a formulahalmaz kielégíthetetlen.

Példánk alkalmat adott arra, hogy első képet nyújtson az analitikus táblázat módszeréről, de a módszer technikáját nem tárta föl minden részletében; hiszen például a lehetséges származékok közül csak az alternáció és a kondicionális származékairól volt szó a példában. A hiányzó részleteket a további példák során folyamatosan pótoljuk.

2. példa. Vizsgáljuk meg az alábbi következtetés helyességét:
Premisszák: Ha a tanú hallgat, az igazság nem derül ki.
Ha az igazság kiderül, a gyanúsítottat elítélik.
Konklúzió (?): Ha a tanú nem hallgat, a gyanúsítottat elítélik.
Paraméterezés:

p: A tanú hallgat,
q: Az igazság kiderül,
r: A gyanúsítottat elítélik.

Analitikus táblázatunk most így kezdődik:

$$(5)\quad \left.\begin{array}{l} 1.\ p \supset \sim q \\ 2.\ q \supset r \\ 3.\ \sim (\sim p \supset r) \end{array}\right\} \begin{array}{l} Pr + \sim K \\ (1\text{–}3.\ \text{sor}) \end{array}$$

Az 1. és a 2. sor „lebontási szabályait", azaz származékainak felírási módját már ismerjük. A 3. sorban negált kondicionális szerepel; igazságának föltétele: előtagja legyen igaz, és utótagja legyen hamis (azaz az utótag negációja legyen igaz). Így a 3. sor származékai '$\sim p$' és '$\sim r$'. Mivel mindkettőnek igaznak kell lennie ahhoz, hogy a 3. sor igaz legyen, ezeket *konjunktív* származékoknak mondjuk, és *egymás alá* írjuk őket, elágaztatás nélkül. Elvileg mindegy, hogy melyik sor származékait írjuk föl először. Most érdemes a 3. sor származékaival kezdeni, hiszen ez nem jár elágaztatással. Ezután a 2., majd az 1. sor származékait írjuk föl. Íme a kész táblázat:

2. táblázat

1.			$p \supset \sim q$	Pr + ~ K
2.			$p \supset r$	(1–3. sor)
3.			$\sim (\sim p \supset r$	
4.			$\sim p$ [3]	
5.			$\sim r$ [3]	
6.		$\sim p$ [2]		r [2]
7.	$\sim p$ [1]	$\sim q$ [1]		* (5,6)
	1. ág	2. ág		3. ág

Magyarázat a 2. táblázathoz. A 4. és az 5. sorban találjuk a 3. sor származékait; 6. alatt a 2. sorét (elágaztatva), 7. alatt az 1. sorét (ugyancsak elágaztatva). A 3. ágon az 5. és a 6. sor ellentmondást alkot, tehát ez az ág zárt. (Ezért az 1. sor származékait ezen az ágon már nem kellett fölvennünk. Érdemes volt a 3. sort előbb bontani, mint az elsőt.) Az 1. és a 2. ágon azonban nem találunk ellentmondást. A 4., 5., 6. és 7. sorok mindegyikében negált mondatparaméter szerepel; ezeket nem bonthatjuk tovább (nincsenek származékaik), de erre nincs is szükség, hiszen igazságföltételeik közvetlenül leolvashatók: '$\sim p$' igaz, ha p hamis stb. Az itt szereplő három mondatparamétert interpretáljuk az alábbi értéktáblázat szerint:

p	q	r
0	0	0

Ezen interpretáció mellett táblázatunk 1. és 2. ágán minden formula 1 értékűnek (igaznak) bizonyul, így az első három sor is. Azaz: A premisszák és a konklúzió negációja együttesen kielégíthető. *A vizsgált „következtetés" tehát nem helyes.*

(Ha az olvasó, futólag nézve át a példát, úgy érezte, hogy a következtetés helyes, az azért lehetett, mert a 'Ha a tanú hallgat, az igazság nem derül ki' premisszába beleértette ezt is: 'de ha nem hallgat, akkor kiderül'. Csakhogy ez nincs benne...)

Megjegyezzük, hogy itt a felbontatlan mondatok belső szerkezetének feltárásával sem lehetne megmenteni a következtetést. Ez már sejthető abból is, hogy a három mondatban egyáltalán nincs közös alkatrész, és kvantor sincs bennük.

A példa tanulságai:

(f) Az analitikus táblázat bármely ágát addig kell folytatni, amíg zárt nem lesz, vagy amíg minden bontható formula származékait is föl nem vettük. Egy formulának nincs származéka, ha magányos vagy negált mondatparaméter.

(g) Ha egy formulahalmaz analitikus táblázatának valamely ága nyitott és befejezett, akkor a formulahalmaz kielégíthető. Ugyanis ha egy ilyen ágon a magányos paramétereket 1-re, a negáltakat pedig 0-ra interpretáljuk (az esetleges többieket pedig tetszés szerint), olyan interpretációt kapunk, amely az ág valamennyi sorához – s így a táblázat kiinduló formuláihoz is – az 1 (igaz) értéket rendeli. (Ez azért van így, mert a formulák igazságföltételeit lépésről lépésre rövidebb formulák igazságföltételeire vezettük vissza, míg csak negált vagy negálatlan mondatparaméterekig nem jutottunk. Így az utóbbiak igazsága biztosítja elődeik igazságát is.)

Praktikus tanács: A konjunktív formulák lebontását célszerű előbb végezni, mint az alternatív formulák bontását. Ha több formula között választhatunk, azt bontsuk előbb (ha van ilyen), amelynek valamely származéka ellentmondást (zártságot) eredményez (legalább egy ágon).

3. példa. Helyes-e ez a következtetés?

Premisszák: Ha nincs pénzem, Agáta látni sem bír, és elmegy.
Ha Agáta csomagol és elmegy, elviszi a magnót is.
Nincs pénzem, és Agáta csomagol.

Konklúzió (?): Agáta elviszi a magnót.

Paraméterezés:

p: Nincs pénzem,
q_1: Agáta látni sem bír,
q_2: Agáta elmegy,
r_1: Agáta csomagol,
r_2: Agáta elviszi a magnót.

(Itt a 'Nincs pénzem' mondatot felbontatlannak vettük, noha felbontható '~ (van pénzem)' alakban. Mivel példánkban a 'Van pénzem' mondat sehol sem fordul elő, a 'Nincs pénzem' mondatban rejlő negáció kifejezésének itt nincs szerepe.)

Formalizálva a mondatokat, az alábbi analitikus táblázatot készíthetjük:

3. táblázat

1.		$p \supset (q_1 \ \& \ q_2)$		
2.		$(r_1 \& q_2) \supset r_2$		
3.		$p \& r_1$		Pr + ~ K (1–4. sor)
4.		$\sim r_2$		
5.		p [3]		
6.		r_1 [3]		
7.	$\sim p$ [1]			$q_1 \& q_2$ [1]
8.	*			q_1 [7]
9.	(5,7)			q_2 [7]
10.		$\sim (r_1 \& q_2)$ [2]		r_2 [2]
11.		$\sim r_1$	q_2	*
		*	*	(4,10)
		(6,11)	(9,11)	
	1. ág	2. ág	3. ág	4. ág

Újdonságok a harmadik táblázatban: a harmadik sorban levő konjunkció *konjunktív* származékai (az 5. és a 6. sorban) nyilvánvalóan a konjunkció tagjai. Ugyanígy, a 7. sor jobb oldali oszlopában levő konjunkció származékait találjuk a 8. és a 9. sorban. A 10. sor bal oszlopában negált konjunkciót látunk. Mivel

$$\sim (r_1 \& q_2) \Leftrightarrow (\sim r_1 \vee \sim q_2),$$

világos, hogy ennek *alternatív* származékai '$\sim r_1$' és '$\sim q_2$'; ezért a 11. sorban újabb elágazás jön létre. Más újdonság a táblázatban nincs.

A táblázat *minden ága zárt*. Az 1. ágon az 5. és a 7. sor, a 2. ágon a 6. és a 11. sor, a 3. ágon a 9. és a 11. sor, a 4. ágon pedig a 4. és a 10. sor alkot ellentmondást. A 3. példa következtetése tehát *helyes*.

4. példa. Helyes-e ez a következtetés?

Premisszák: Vagy Árpási, vagy Búzási lesz az új igazgató (de csak egyikük).
Ha Búzási lesz az új igazgató, Zabos nem vállalja az elnöki tisztet.

Konklúzió (?): Ha Zabos vállalja az elnöki tisztet, Árpási lesz az új igazgató.

Paraméterezés:

p: Árpási lesz az új igazgató,
q: Búzási lesz az új igazgató,
r: Zabos vállalja az elnöki tisztet.

Az első premisszában kizáró 'vagy' szerepel, amelyet negált bikondicionálissal fejezhetünk ki:

(6) $\sim (p \equiv q)$.

Ez akkor és csak akkor igaz, ha p és q igazságértéke különböző, ami pedig két *alternatív* módon valósulhat meg: p igaz és q hamis, vagy p hamis és q igaz. Ennélfogva (6) alternatív származékai:

p	$\sim p$
$\sim q$	q

Mindkét alternatívában két-két *konjunktív* feltételt kapunk. Ennek figyelembevételével a feladat megoldásához az alábbi analitikus táblázatot készítjük:

4. táblázat

1.		$\sim (p \equiv q)$	Pr + ~ K (1–3. sor)
2.		$p \supset \sim r$	
3.		$\sim (r \supset p)$	
4.		r [3]	
5.		$\sim p$ [3]	
6.	$\sim p$ [2]		$\sim r$ [2]
7.	p [1]	$\sim p$ [1]	*
8.	$\sim p$ [1]	q [1]	(4,6)
	*	*	
	(5,7)	(6,8)	
	1. ág	2. ág	3. ág

A következtetés *helyes,* mert a táblázat minden ága zárt. Az 1. ágon az 5. és a 7. sor, a 2. ágon a 6. és a 8., a 3. ágon pedig a 4. és a 6. sor alkot ellentmondást.

A példák után rátérhetünk az elméleti rendszerezésre. Kezdjük a származékok (azaz a „lebontási szabályok") áttekintésével.

Nincsenek származékaik a magányos és a negált mondatparamétereknek ("p", "$\sim p$" stb.). A származékokkal bíró formulák ilyen szerkezetűek lehetnek:

$$A \,\&\, B,\quad A \vee B,\quad A \supset B,\quad A \equiv B,$$
$$\sim\sim A,\quad \sim(A \,\&\, B),\quad \sim(A \vee B),\quad \sim(A \supset B),\quad \sim(A \equiv B).$$

Itt A és B tetszőleges (atomi vagy összetett) formulák.

Egyes formuláknak *konjunktív,* másoknak *alternatív* származékai vannak. Az előbbieket *konjunktív,* az utóbbiakat *alternatív* formuláknak mondhatjuk. *A konjunktív formulák* származékainak meghatározását az alábbi sémák tartalmazzák:

$$\sim\sim A \to A \quad\Big|\quad A \,\&\, B \to \begin{cases} A \\ B \end{cases} \quad\Big|\quad \sim(A \vee B) \to \begin{cases} \sim A \\ \sim B \end{cases} \quad\Big|\quad \sim(A \supset B) \to \begin{cases} A \\ \sim B \end{cases}$$

Az alternatív formulák származékaira vonatkozó sémák:

$$(A \vee B) \to A \mid B \quad\Big|\quad (A \supset B) \to \sim A \mid B \quad\Big|\quad \sim(A \,\&\, B) \to \sim A \mid \sim B \quad\Big|\quad A \equiv B \to \begin{cases} A \mid \sim A \\ B \mid \sim B \end{cases} \quad\Big|\quad \sim(A \equiv B) \to \begin{cases} A \mid \sim A \\ \sim B \mid B \end{cases}$$

(A felsorolt „lebontási szabályok" mindegyikével találkoztunk a kidolgozott példákban.) A kettős negációra vonatkozó szabályt általában implicite használjuk: töröljük vagy ki sem írjuk a kettős negációjelet. Ha a listánkon nem szereplő szerkezettel lenne dolgunk, alakítsuk át (a logikai ekvivalencia valamely törvénye szerint) olyan szerkezetté, amely már szerepel a listánkon. (Például "$A \vee B$" helyett vegyük "$\sim(A \equiv B)$"-t, "$A \mid B$" helyett "$\sim(A \,\&\, B)$"-t, "$A \,||\, B$" helyett "$\sim(A \vee B)$"-t.)

Az analitikus táblázatok készítésére vonatkozóan e szakasz (a), ..., (g) szabályai minden lényeges információt tartalmaznak. Mégis, foglaljuk össze átfogóan a tudnivalókat.

Véges (de nem üres) formulahalmaz analitikus táblázata egy vagy több ágból áll, az egyes ágak egymás alá írt formulák sorozatai, és bármely két ág kezdő része közös.

Az összes ág közös kezdő részét képezik az adott formulahalmaz elemei (tetszőleges sorrendben). Az adott formulahalmaz elemein kívül bármely ágon csak olyan formula szerepelhet, amely az ág valamely megelőző tagjának származéka (a származékok előbb adott meghatározása szerint).

Egy ág akkor és csak akkor ágazhat ketté, ha az elágazás valamely formula al-

ternatív származékainak fölvétele révén jön létre. (Többtagú alternáció származékainak fölvételekor kettőnél több részre való elágaztatás is megengedett.)

Egy ágat zártnak mondunk, ha ellentmondó tagpár található rajta. A nem zárt ágakat nyitottaknak mondjuk. Egy nyitott ágat akkor tekintünk befejezettnek, ha minden konjunktív tagjának minden származéka is szerepel rajta, és ha minden alternatív tagjának egyik alternatív származéka (illetve származékpárja, bikondicionális és negált bikondicionális esetén) is szerepel rajta. A kész analitikus táblázaton minden nyitott ágnak befejezettnek kell lennie.

Ha egy formulahalmaz analitikus táblázatán minden ág zárt, akkor a formulahalmaz kielégíthetetlen. Ha van nyitott ág, ezek mindegyike meghatároz egy-egy olyan interpretációt (ezek nem feltétlenül különbözőek), amely a formulahalmaz minden elemét igazzá teszi: értékeljük az ágon levő magányos paramétereket 1-re, a negáltakat pedig 0-ra.

Az igazságfunktorok körében az analitikus táblázat módszere a kielégíthetőség eldöntésére szolgáló univerzális eljárás, amely egy véges formulahalmazra alkalmazva, véges számú lépésben mindig eredményhez vezet. Ugyanis egy összetett formulának csak véges sok (többnyire két) származéka van, a származékok mindig rövidebbek, mint az eredeti, s így véges számú lépés után magányos vagy negált mondatparaméterekhez jutunk (amelyeknek már nincs származékuk). Ezért egy véges formulahalmaz analitikus táblázatának minden ága véges hosszúságú, s az ágak száma is véges. Elkészítése számítógépbe programozható.

Más a helyzet, ha formuláinkban *kvantorok* is szerepelnek. Erről lesz szó a következő szakaszban.

10.2. A MÓDSZER KITERJESZTÉSE KVANTOROS FORMULÁKRA

5. példa. Helyes-e az alábbi következtetés?

Premisszák: Elemér mindenkit fúr, aki okosabb nála.
Hugó nem okosabb, mint azok, akik fúrják őt.

Konklúzió (?): Hugó nem okosabb, mint Elemér.

Ezt a feladatot nem tudjuk megoldani, ha a szereplő állítások logikai szerkezetének feltárásakor csak igazságfunktorokat veszünk figyelembe. Az első premisszában látható egy univerzális kvantor, és így (korábbi tapasztalataink alapján) sejthető, hogy ennek hatókörében kondicionális rejtőzik, de maga a mondat nem bontható föl két tagmondatra valamely igazságfunktor alkalmazásával. A második premisszában a többes szám ugyancsak univerzális kvantorra utal, és sejthető, hogy a tagadószó a kvantor hatókörén belüli negációt fejez ki. Az állítólagos konklúzió persze a 'Hugó okosabb, mint Elemér' mondat negációja. Ezek szerint: ha csak igazságfunktorokat veszünk figyelembe, a két premisszát felbonthatatlannak kell tekintenünk, a konklúziót pedig legföljebb '$\sim r$' alakban ábrázolhatjuk. Világos azonban, hogy a

$\{p, q\} \Rightarrow \sim r$

séma nem reprezentál helyes következtetést.

Térjünk hát rá a logikai szerkezet finomabb ábrázolására. Gondosan megvizsgálva a premisszákat, rájövünk, hogy logikai szerkezetüket az alábbi nyitott mondatok univerzális kvantifikációja fejezi ki:

(1) x okosabb, mint Elemér $\supset$ Elemér fúrja x-et.

(2) x fúrja Hugót $\supset \sim$ (Hugó okosabb, mint x).

Vezessük be a következő rövidítéseket:

Oxy: x okosabb, mint y; *Fxy:* x fúrja y-t;
e: Elemér; *h:* Hugó.

E rövidítések alkalmazásával – figyelembe véve (1)-et és (2)-t – a két premissza logikai szerkezetét az alábbi formulákkal fejezhetjük ki:

$\forall x[Oxe \supset Fex]$, $\forall x[Fxh \supset \sim Ohx]$.

A konklúzió pedig:

$\sim Ohe$.

Vegyük figyelembe, hogy egy "$\forall x A(x)$" szerkezetű mondatnak logikai következménye a megfelelő $A(c)$ mondat, tetszőleges c névvel. Ennek alapján az analitikus táblázatokban a származékok meghatározását aggodalom nélkül kibővíthetjük a következő szabállyal: "$\forall x A(x)$"-nek (konjunktív) származéka $A(c)$, feltéve hogy c olyan paraméter, amely szerepel azon az ágon, amelyen "$\forall x A(x)$" előfordult. (Itt természetesen $A(c)$ úgy keletkezik $A(x)$-ből, hogy benne x minden szabad előfordulását c-vel helyettesítjük.) Kíséreljük meg analitikus táblázattal – ezen új szabályt is fölhasználva – ellenőrizni következtetésünk helyességét. Kiinduló formuláink: a két premissza és a negált konklúzió (ezt, '$\sim \sim Ohe$' helyett, mindjárt a rövidített '*Ohe*' alakban írjuk föl). Kimutatandó, hogy e formulahalmaz kielégíthetetlen. A táblázat a következő:

5. táblázat

1.		$\forall x[Oxe \supset Fex]$		$\left.\right\}$ $Pr + \sim K$
2.		$\forall x[Fxh \supset \sim Ohx]$		(1–3. sor)
3.		Ohe		
4.		$Ohe \supset Feh$ [1]		
5.	$\sim Ohe$ [4]		Feh [4]	
6.	*		$Feh \supset \sim Ohe$ [2]	
7.	(3,5)	$\sim Feh$ [6]	$\sim Ohe$ [6]	
		*	*	
		(5,7)	(3,7)	
	1. ág	2. ág	3. ág	

Kommentár a 5. táblázathoz. A 4. sort úgy kaptuk az 1.-ből, hogy – új szabályunkat alkalmazva – x-et h-val helyettesítettük. Hasonlóan, a 6. sort a 2.-ból x-nek e-vel való behelyettesítésével nyertük. Az egyéb származékok felírásakor az igazságfunktorokra vonatkozó szabályokat alkalmaztuk. A táblázat mindhárom ága *zárt*. Az 1. ágon a 3. és az 5. sor, a második ágon az 5. és a 7., a 3. ágon pedig a 3. és a 7. sor alkot ellentmondást.

Az összes ág zártságából eddig arra következtettünk, hogy a kiinduló formulahalmaz kielégíthetetlen. Jogos-e most is ez a következtetés? Igen, jogos. Hiszen ha lenne olyan interpretáció, amely a kiinduló három formulát együtt kielégítené (1-re értékelné), akkor az

(a) 1-re értékelné '*Ohe*'-t és a negációját is, amint az 1. és a 3. ág mutatja, vagy

(b) 1-re értékelné '*Feh*'-t és a negációját is, amint a 2. ág mutatja.

A táblázat egyértelműen mutatja, hogy több lehetőség nincs, de a lehetőségek egyike sem realizálható (egyetlen interpretációban sem lehet egy formula is meg a negációja is igaz). A vizsgált formulahalmaz tehát valóban kielégíthetetlen, s így a 6. példa következtetése *helyes*.

Az univerzális kvantifikációra bevezetett lebontási szabályunk azonban még korántsem elegendő az analitikus táblázat módszerének az elsőrendű logikára való kiterjesztéséhez. Szó sem volt még például az egzisztenciális kvantifikáció származékairól. Az idevágó szabály egyszerű: "$\exists x A(x)$" egyetlen (konjunktív) származéka $A(c)$, olyan új c névparaméterrel, amely a vizsgált ágon nem szerepel. Ugyanis "$\exists x A(x)$" igazságföltétele az, hogy $A(x)$ igaz legyen az x változó valamely értékére. Az x egy ilyen értékét óhajtjuk c-vel megnevezni. Mivel általában nem tudjuk, hogy mely dolog ez az érték, nem azonosíthatjuk önkényesen a korábban már bevezetett névparaméterek valamelyikének jelöletével. Ez a magyarázata az új c választásának.

Névparaméterek szerepelhetnek a kiinduló formulákban, és újak léphetnek föl az egzisztenciaformulák származékaiban. Univerzális kvantifikáció származékaiban nem szükséges új névparaméterek bevezetése. Ha még egyetlen névparaméterünk sincs, akkor persze univerzális kvantifikáció származékaként is bevezethetünk egyet (hiszen kikötöttük, hogy a tárgyalási univerzum sohasem üres).

A "$\sim \forall x.A(x)$" alakú formulákat átalakíthatjuk "$\exists x. \sim A(x)$" alakba, a "$\sim \exists x A(x)$" alakúakat pedig "$\forall x. \sim A(x)$"-ba. Ezek révén bármely – negált vagy negálatlan – kvantoros formula származékait meghatároztuk.

Azonossági formula is előfordulhat egy analitikus táblázatban. A negált önazonosság [$\sim (a = a)$] föllépése éppúgy zárttá (ellentmondásossá) tesz egy ágat, mint egy ellentmondó formulapár.

Ha "$a = b$" és $F(a)$ igazak, akkor – Leibniz törvénye szerint – $F(b)$-nek is igaznak kell lennie. Ha egy ágon szerepel "$a = b$", és ugyanazon az ágon $F(a)$, $F(b)$ egyike negáltan, másika negálatlanul fordul elő, akkor az ág zártnak tekintendő.

Egy nyitott ág *befejezettségének* feltételei ugyanazok, mint az előző szakaszban; a nyomaték kedvéért azonban fogalmazzuk meg külön a kvantoros és az azonossági formulák származékaira vonatkozó kikötéseket:

(a) "$\forall x A(x)$" származékaként minden olyan $A(c)$ formulának szerepelnie kell, amely az ágon előforduló valamely c névparaméterrel képezhető.

(b) "$\exists x A(x)$" származékaként legalább egy $A(c)$ alakú formulának szerepelnie kell.

(c) "*$a = b$" és atomi $F(a)$, $F(b)$* pár esetén: ha a pár egyik tagja szerepel az ágon, a másiknak is szerepelnie kell.

Amíg arra számítunk, hogy egy ág zárt lesz, az univerzális és az azonossági formulák összes származékainak felírását halogathatjuk; hiszen ha az ág záródik, fölösleges további tagokkal meghosszabbítani. Így a 8. táblázatban is elég volt a két univerzális formula egy-egy származékát szerepeltetni, hiszen az ágak már ezzel is zártakká lettek.

Az analitikus táblázat befejezett nyitott ágához most is adható olyan interpretáció, amely az ág minden formuláját igazzá teszi (de most nem részletezzük, hogyan). A befejezett nyitott ág létezése tehát elsőrendű formulák esetén is biztos jele a kielégíthetőségnek.

6. példa. Igazoljuk az alábbi egypremisszás következtetés helyességét.

Premissza: A puma húsevő.

Konklúzió (?): Aki pumát etet, húsevőt etet.

Mindkét mondatot tekintsük általánosnak. Gondunk a konklúzió logikai szerkezetének olyan kifejtése, amelyben a premissza predikátumai explicite szerepelnek. Az, hogy 'x pumát etet', annyit jelent, hogy

$\exists y$ [y puma, & x eteti y-t].

Hasonlóan oldjuk meg az 'x húsevőt etet' ábrázolását is. Jelöléseink:

P: puma,
H: húsevő,
Exy: x eteti y-t.

A két mondat szerkezete tehát:

$\forall x[Px \supset Hx]$,

$\forall x[\exists y(Py \,\&\, Exy) \supset \exists y(Hy \,\&\, Exy)]$.

Készítsük el a premissza és a negált konklúzió analitikus táblázatát:

6. táblázat

1.	$\forall x(Px \supset Hx)$		$\}$ $Pr + \sim K$ (1–2. sor)
2.	$\sim \forall x.[\exists y(Py \,\&\, Exy) \supset \exists y(Hy \,\&\, Exy)]$		
3.	$\sim(\exists y(Py \,\&\, Eay) \supset \exists y(Hy \,\&\, Eay))$ [2]		
4.	$\exists y(Py \,\&\, Eay)$ [3]		
5.	$\sim \exists y(Hy \,\&\, Eay)$ [3]		
6.	$Pb \,\&\, Eab$ [4]		
7.	Pb [6]		
8.	Eab [6]		
9.	$Pb \supset Hb$ [1]		
10.	$\sim Pb$ [9]	Hb [9]	
11.	*	$\sim (Hb \,\&\, Eab)$ [5]	
12.	(7,10)	$\sim Hb$ [11]	$\sim Eab$ [11]
		*	*
		(10,12)	(8,12)
	1. ág	2. ág	3. ág

Magyarázat a 6. táblázathoz. A 2. sorban '$\sim \forall x$' helyére gondoljunk '$\exists x \sim$'-et; ebből kapjuk a 3. sort, x-et a-val helyettesítve. Az 5. sorban pedig '$\sim \exists y$' helyére gondoljunk '$\forall y \sim$'-et; a 11. sor ennek származéka, y-t a már korábban bevezetett b-vel helyettesítve. A táblázat mindhárom ága zárt. Az 1. ágon a 7. és a 10., a 2. ágon a 10. és a 12., a 3. ágon a 8. és a 12. sor ad ellentmondást. A következtetés helyességét ezzel igazoltuk.

7. példa. Ellenőrizzük az alábbi következtetést:

Premisszák: Más, mint Anna és Berti, nem kap jutalmat.
Valaki, aki jutalmat kap, férjhez megy.
Berti nem megy férjhez.

Konklúzió (?): Anna férjhez megy.

(*Megjegyzés.* Nem tudjuk, hogy Berti fiú-e vagy lány – Berta vagy Albert –, tehát a 3. premissza nem fölösleges. De ha egyértelműen fiúnevet szerepeltetnénk itt, akkor sem lenne fölösleges, hiszen a nemlogikai szavak jelentése nem lehet hatással a következtetés logikai helyességére.)

Szótár:
J: jutalmat kap,
F: férjhez megy,
a: Anna,
b: Berti.
Az első premissza szerkezete:

$\forall x[Jx \supset ((x = a) \vee (x = b))]$.

A kész analitikus táblázat (7. táblázat) minden ága zárt:

7. táblázat

1.		$\forall x[Jx \supset ((x = a) \vee (x = b))]$		$Pr + \sim K$ (1–4. sor)
2.		$\exists x[Jx \,\&\, Fx]$		
3.		$\sim Fb$		
4.		$\sim Fa$		
5.		$Jc \,\&\, Fc$ [2]		
6.		Jc [5]		
7.		Fc [5]		
8.		$Jc \supset ((c = a) \vee (c = b))$ [1]		
9.	$\sim Jc$ [8]	$(c = a) \vee (c = b)$ [8]		
10.	*	$c = a$ [9]	$c = b$ [9]	
11.	(6,9)	Fa [7,10]	Fb [7,10]	
		*	*	
		(4,11)	(3,11)	
	1. ág	2. ág	3. ág	

Megjegyzés a 7. táblázathoz. A 11. sort Leibniz törvénye alapján kapjuk a 7. és a 10. sorból (külön-külön a 2. és a 3. ágon). Az olvasóra bízzuk az ellentmondó párok kikeresését a táblázat három ágán.

Ha univerzális kvantor hatókörében egzisztenciális kvantor szerepel, mint például a

(3) $\forall x \exists y.Fxy$

formulában, akkor a származékokra vonatkozó szabályaink folytán végtelen ágú analitikus táblázat keletkezhet (8. táblázat):

8. táblázat

1.	$\forall x\ \exists y.\ Fxy$	
2.	$\exists y.\ Fay$	[1]
3.	Fab	[2]
4.	$\exists y.\ Fby$	[1]
5.	Fbc	[4]
6.	$\exists y.\ Fcy$	[1]
7.	Fcd	[6]
	⋮	

Ebből úgy tűnik, hogy a kiinduló '$\forall x \exists y.Fxy$' formula kielégíthető ugyan, de csak egy olyan U tárgyalási univerzumon, amelynek végtelen sok eleme van ($U = \{u_0, u_1, u_2, \ldots\}$). Ámde nincs semmi, ami előírná, hogy az *a, b, c, d,* ... névparamétereknek *különböző* dolgokat kell jelölniük. Valójában formulánk már az egyelemű $U = \{u_0\}$ univerzumon is kielégíthető, csak F-et úgy kell interpretálni, hogy igaz legyen az (u_0, u_0) párra. Más a helyzet, ha formulánkhoz hozzávesszük a következő két formulát is:

(4) $\forall x. \sim Fxx$

(5) $\forall x \forall y \forall z[(Fxy \ \& \ Fyz) \supset Fxz]$.

Jelentse például Fxy azt, hogy x és y számok, és x kisebb, mint y ($x < y$). Ekkor a (3), (4), (5) formulák rendre ezt mondják:

(3′) Minden számnál van nagyobb.
(4′) Egyetlen szám sem kisebb önmagánál.
(5′) Ha egy szám kisebb egy másiknál, a másik pedig egy harmadiknál, akkor az első kisebb a harmadiknál.

A természetes számok végtelen univerzumán ezek az állítások igazak. A (3), (4), (5) formulák csakis végtelen univerzumokon lehetnek együttesen kielégíthetők. Így közös analitikus táblázatukon elkerülhetetlenül keletkezik végtelen ág, amelyet persze nem tudunk „befejezni", ténylegesen elkészíteni.

Az analitikus táblázatokon a zárt ágak mindig végesek; hiszen ha megjelenik az ellentmondás az ágon, akkor az ágat fölösleges tovább folytatni. Ennélfogva csakis a nyitott ágak lehetnek végtelenek. Következésképp: Ha egy formulahalmaz ténylegesen kielégíthetetlen, akkor analitikus táblázata véges (hiszen minden ága zárt), tehát elkészíthető. A kielégíthetetlenség tehát mindig bizonyítható az analitikus táblázat elkészítésével. Következésképp a helyes következtetések helyessége is mindig bizonyítható ezen az úton.

De ha egy formulahalmaz (melynek elemeiben kvantoros formulák is szerepelnek) analitikus táblázatának elkészítése során valamely ágon egy ideig nem

találunk ellentmondást, akkor nincs általánosan alkalmazható ismertetőjele annak, hogy az ág záródik-e valaha, avagy nyitott, de végtelen ág keletkezik. Előfordulhat tehát, hogy egy formulahalmaz kielégíthetőségét az analitikus táblázat módszerével nem tudjuk véges számú lépésben eldönteni. (Mint az előző szakaszból tudjuk, ha formuláinkban csak igazságfunktorok szerepelnek, ez az eset nem fordulhat elő.)

Ezt a jelenséget úgy fogalmazhatjuk, hogy az analitikus táblázat módszere – az elsőrendű logika egészére alkalmazva – *nem* általános eldöntési eljárás a kielégíthetőség – s vele együtt a következményreláció – vizsgálatára. Ugyanis egy eljárástól jogosan várjuk el, hogy véges számú lépésben befejeződjék, és választ adjon a föltett kérdésre.

Van-e más általános eldöntési eljárás az elsőrendű logikában a kielégíthetőség vizsgálatára? Ha lenne ilyen eljárás, annak hatalmas jelentősége lenne, hiszen például arra a kérdésre, hogy egy matematikai állítás tétele-e egy matematikai elméletnek, egy ilyen eljárás révén gépies (és számítógépbe programozható) úton választ kaphatnánk, s ezzel a matematikusok munkájának jelentős része, a tételek bizonyítása, átadható lenne a számítógépeknek.

Matematikai eszközökkel valószínűsítették, hogy ilyen eldöntési eljárás keresése meglehetősen reménytelen. Itt azért kell csak valószínűsítésről – és nem bizonyításról – beszélnünk, mert a matematikai bizonyítás előfeltétele az eljárás fogalmának matematikai szabatosságú meghatározása. Ilyen meghatározás létezik. Amit szabatosan bizonyítottak, az annyi, hogy olyan eldöntési eljárás nem létezik, amely e definíció határain belül marad. Ámde elvileg bizonyíthatatlan, hogy az eljárás (algoritmus) szemléletes fogalma egyezik-e a matematikai eszközökkel definiált eljárás fogalmával. Ezt csak cáfolni lehetne, ha valaki találna egy olyan eljárást, amely kívül reked a matematikai definíción. Mindenesetre, eddig ilyet nem találtak.

Ezek alapján úgy tűnik, hogy nem az analitikus táblázat módszere felelős az eldöntési eljárás hiányáért. Az ok a formulák szerkezetének bonyolultságában rejlik. Láttuk, hogy az analitikus táblázat valamely ágát az teszi végtelenné, ha egyre új és új névparamétereket kell bevezetnünk; ez pedig csak akkor fordul elő, ha univerzális kvantor hatókörében egzisztenciális kvantor is szerepel. A következő szakaszban olyan kvantoros formulákra szorítkozunk, amelyekben ez az eset biztosan nem lép föl, s e szűkített körön belül egyszerű és szemléletes eldöntési eljárást tudunk adni a kielégíthetőség vizsgálatára.

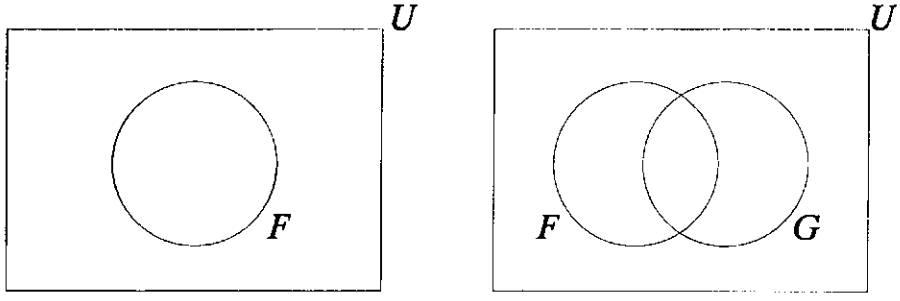
10.3. A VENN-DIAGRAMOK MÓDSZERE

Tekintsük most az Fx, Gx stb. alakú egyszerű formulákat, amelyek *egyargumentumú* predikátumoknak egyazon x változóval való kitöltése révén keletkeznek, továbbá az ilyenekből igazságfunktorok alkalmazásával képezhető összetett

nyitott formulákat (mint pl. "$Fx \supset Gx$", "Fx & Gx" stb.). Nevezzük ezeket *egyrétű nyitott formulák*nak. Ezekből *egyrétű zárt formulákat* úgy nyerhetünk, ha az x változót lekötjük univerzális vagy egzisztenciális kvantorral (például "$\forall x[Fx \supset Gx]$", "$\exists x.Fx$"), vagy ha az x változót valamely névparaméterrel helyettesítjük (például "Fa & Ga"). Az x változó unalmas kiírását most elhagyhatjuk, ugyanúgy, mint a 7.4. szakasz „kengurus" következtetési példájában.

Az egyrétű zárt formulák kielégíthetőségének vizsgálatára bevezetjük a *Venn-diagramok* módszerét. (J. Venn 19. századbeli angol matematikusról elnevezve.) Ábrát készítünk, amelyben egy zárt síkidom – például négyszög – jelképezi a tárgyalási

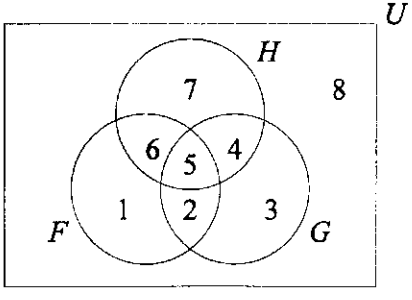
2. ábra



univerzumot (U), és ennek belsejében fölvett további zárt síkidomok – például körök – a formuláinkban szereplő predikátumok terjedelmét. Ha csak egy predikátumról van szó, ennek ábrája két (közös pont nélküli) tartományra bontja U-t. Minden újabb predikátum ábrázolásakor valamennyi meglevő tartománynak két részre kell tagolódnia (hiszen két predikátum terjedelmének *lehetnek* közös elemei). A *2. ábrán* látjuk egy, illetve két predikátum ábrázolási módját.

Predikátumok ábrázolására akkor használhatunk köröket, ha számuk nem haladja meg a hármat *(3. ábra)*. Ebben az esetben (tudniillik 3 predikátum esetén) $2^3 = 8$ elemi (közös pont nélküli) tartomány szerepel az ábrán.

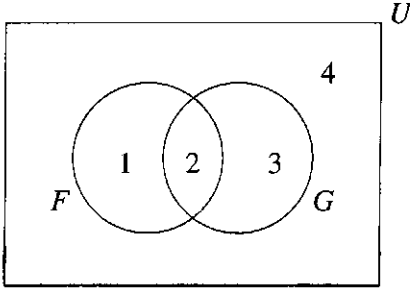
3. ábra



Háromnál több predikátum esetén másféle síkidomokat kell használnunk (példáinkban erre ritkán lesz szükség), betartva azt a feltételt, hogy minden újabb predikátum ábrázolásakor az elemi tartományok számának meg kell kétszereződnie.

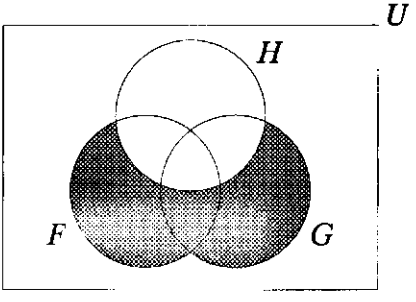
Nyitott formula diagramja mindig az U tartomány egy résztartománya lesz. Felbontatlan predikátum esetén e tartomány természetesen a predikátum terjedelmét ábrázoló kör (vagy más idom). Két nyitott formula konjunkciójának diagramja a tagok diagramjának közös része, az alternáció diagramja pedig a tagok diagramjának egyesítése. A 4. ábrán 'F & G' diagramja a '2' jelzésű tartomány, '$F \vee G$'-t az 1, 2, 3 jelzésű tartományok együttese ábrázolja, '$\sim F$'-et 3 és 4, '$\sim G$'-t pedig 1 és 4 együtt. Mivel $(F \supset G) \Leftrightarrow (\sim F \vee G)$, ezt a 2, 3, 4 jelű tartományok egyesítése ábrázolja. '$F \equiv G$' mint '$(F \supset G)$ & $(G \supset F)$' kezelhető, így diagramja a 2, 4 jelű tartományok együttese.

4. ábra

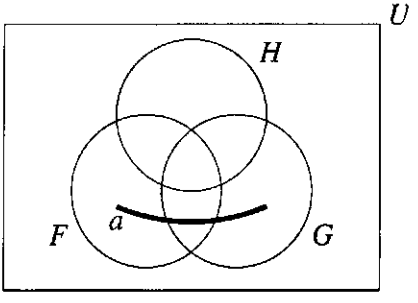


Egy nyitott formula diagramja és negációjának diagramja mindig közös pont nélküliek, és egyesítésük kitölti a teljes tárgyalási univerzumot. A kielégíthetetlen formulák diagramja az üres tartomány. Az *5. ábrán* sötét tartomány ábrázolja az

5. ábra



6. ábra



$(F \vee G)$ & $\sim H$

nyitott formula diagramját.

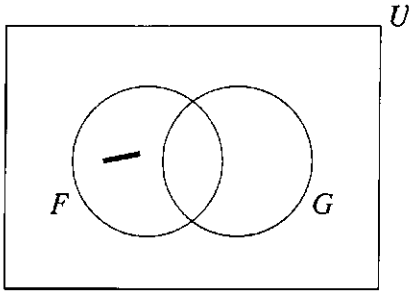
A zárt formulákat úgy ábrázoljuk, hogy a megfelelő nyitott formula diagramjára rávisszük azt az információt, amit a zárt formula nyújt. Éspedig:

(a) Ha formulánk $A(a)$ alakú, vagyis az $A(x)$ nyitott formulából x-nek a-val

való helyettesítésével keletkezett, akkor arról informál, hogy az *a* nevű egyed $A(x)$ igazságtartományában helyezkedik el. Ezt úgy ábrázoljuk, hogy $A(x)$ grafikonjának belsejében egy nyitott vonaldarabot rajzolunk, és mellé írjuk '*a*'-t. Ha $A(x)$ grafikonja több elemi tartományból áll, e vonaldarab haladjon át mindegyiken. Például '$(Fa \vee Ga) \& \sim Ha$' grafikonja – tekintettel az 5. ábrára – a 6. ábrán látható.

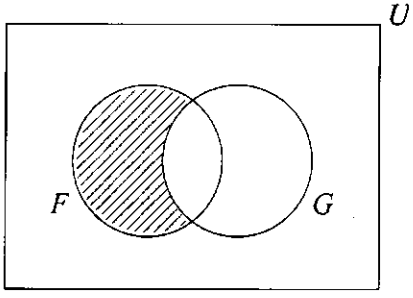
(b) "$\exists x A(x)$" információtartalma az, hogy $A(x)$ terjedelme nem üres. Ezt úgy ábrázoljuk, hogy $A(x)$ grafikonjának belsejében nyitott vonaldarabot rajzolunk, tehát ugyanúgy, mint $A(a)$-t, csak nem írunk névparamétert a vonal mellé. Például '$\exists(F \& \sim G)$' diagramja a 7. ábrán látható.

7. ábra



(c) "$\forall x A(x)$" információtartalma az, hogy *U*-ban $A(x)$ terjedelmén kívül nincs semmi. Ezt úgy ábrázoljuk, hogy vonalkázással megsemmisítjük *U*-nak *az* $A(x)$ diagramján kívül eső részét (azaz: bevonalkázzuk "$\sim A(x)$" grafikonját). – Ábrázoljuk például '$\forall(F \supset G)$'-t. Mivel a *4. ábrán* a 2, 3, 4 jelű tartományok alkotják '$F \supset G$' diagramját, *U*-nak az ezen kívül eső része az 1 jelű tartomány: ezt kell bevonalkáznunk (8. ábra):

8. ábra



Az ábra világosan mutatja, hogy *minden, ami F,* az *G,* hiszen *F*-nek a *G*-n kívüli része üres. Érdemes általánosan is megjegyezni:

"$\forall(A \supset B)$" diagramját úgy kapjuk meg, hogy bevonalkázzuk *A* diagramjának azt a részét, amely *B* diagramján kívül esik. Itt *A* és *B* lehetnek összetett nyitott formulák is.

Összegezve: Nyitott formula diagramján minden tartomány fehér. Ez a teljes információhiány jele. A zárt formulák információtartalma mindig az, hogy az ábrán szereplő tartományok némelyike üres, illetve nem üres. Az ürességet bevonalkázással, a nemürességet a tartományba rajzolt vonaldarabbal jelöljük.

A kielégíthetőség vizsgálatakor egy vagy több zárt (egyrétű) formulához készítünk *közös* Venn-diagramot. Fölvesszük a közös *U*-t, és ezen belül ábrázoljuk az *összes* predikátumot, ami csak előfordul formuláinkban. (Ha ezek száma *n*, *U*-nak 2^n számú elemi tartományra kell tagozódnia. Kényelmesen rajzolható, ha $n \leq 3$.) Ezután sorra fölvisszük az egyes formulák információtartalmát a diagramra. Célszerű az univerzális formulák ábrázolásával kezdeni, mert ekkor – a vonalkázás folytán – az elemi tartományok száma csökkenhet. Ha mégsem ezzel kezdjük, előfordulhat, hogy vonalkázással megsemmisítjük valamely létezési jel (vonaldarab) egy részét. Ezzel a létezési jel egy szűkebb tartományra korlátozódik. Ha azonban egy létezési jel a vonalkázás révén teljesen megsemmisül, az már a logikai ellentmondás jele; hiszen ez azt jelentené, hogy egy üres tartományban van valami, ami lehetetlen. Ebben az esetben az ábrázolandó formulahalmaz kielégíthetetlen. Ugyancsak a kielégíthetetlenség jele az is, ha a diagram készítése során a tárgyalási univerzum teljesen bevonalkázódik, hiszen kikötöttük, hogy a tárgyalási univerzum nem lehet üres. Ha a diagram készítése során nem fordul elő ellentmondásra utaló jel, akkor a vizsgált formulahalmaz kielégíthető.

Röviden így fogalmazhatunk: *egyrétű zárt formulák egy halmaza kielégíthető, ha ábráik „elférnek" egy közös Venn-diagramon,* anélkül hogy valamely tartománynak egyidejűleg üresnek és nemüresnek is kellene lennie (és *U* nincs teljesen bevonalkázva). Ebben az esetben az ábráról leolvasható egy olyan interpretáció, amely a formulahalmaz minden elemét igazzá teszi.

Negált univerzális és egzisztenciaformulák is ábrázolhatók, hiszen a kvantifikációs De Morgan-szabályok szerint '$\sim\forall$' helyett írhatunk '$\exists \sim$'-t, '$\sim \exists$' helyett pedig '$\forall \sim$'-t.

Következtetés ellenőrzésekor – egyrétű formulák körében – közös diagramon ábrázoljuk a premisszákat. Ha a kapott ábrán – további rajzolás nélkül – a konklúzió diagramja is rajta van, akkor a következtetés helyes (hiszen ekkor a konklúzió negációjának diagramja már „nem fér rá" az ábrára). Ha viszont a konklúzió diagramja nem jelenik meg automatikusan a premisszák közös diagramján, akkor az ábrára még ráfér a konklúzió negációja is; tehát ekkor a következtetés nem helyes.

8. példa. Ellenőrizzük az alábbi következtetést:

Premisszák: A könyvtár és a sportklub közös tagjai kedvelik a zenét.
Van olyan sportklubtag, aki nem zenekedvelő.

Konklúzió (?): A sportklubnak van olyan tagja, aki nem tagja a könyvtárnak.

Paraméterezés:

K: könyvtári tag,

S: sportklubtag,

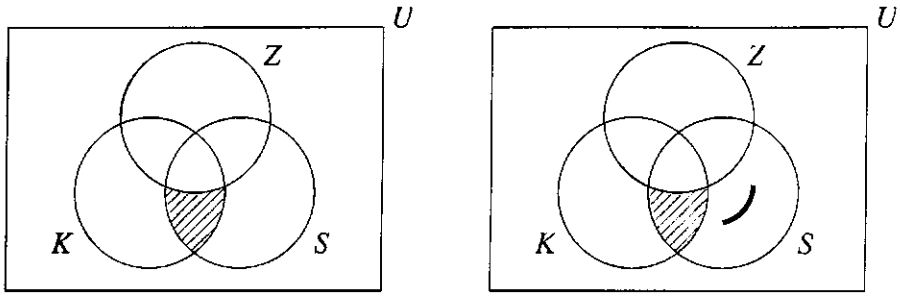
Z: zenekedvelő.

A könyvtár és a sportklub közös tagjaira nyilván 'K & S' utal. A három mondat logikai szerkezete:

$\forall[(K \& S) \supset Z]$, $\exists[S \& \sim Z]$, $\exists[S \& \sim K]$.

A két premissza közös diagramjának szerkesztése *(9. ábra)* két lépésben:

9. ábra



Az 1. lépésben az első premisszát ábrázoltuk: bevonalkáztuk 'K & S'-nek a Z-n kívüli részét. A 2. lépésben, a második premisszának megfelelően, létezési jelet rajzoltunk S-nek a Z-n kívüli részébe. Ezt most fölösleges lenne meghosszabbítani a már bevonalkázott tartományba is (amely ugyancsak S-nek Z-n kívül eső része). Ha a második premisszát ábrázolnánk előbb, akkor persze ezt kellene tennünk, de ezt a hosszabbítást az első premissza rajza a bevonalkázással lefödné; így végül a létezési jel csak abban a tartományban maradna meg, ahová most rajzoltuk. A konklúzió – $\exists[S \& \sim K]$ – szerint létezési jelnek kell lennie S-nek a K-n kívül eső részében. Van is. A következtetés tehát helyes.

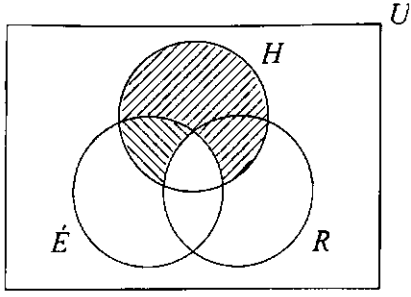
9. példa. Helyes-e ez a következtetés?
Premisszák: Aki Ubulra hallgat, az éretlen.
Aki Ubulra hallgat, az rosszul jár.
Konklúzió (?): Némely éretlen rosszul jár.
Formalizálva:

$\forall[H \supset É]$, $\forall[H \supset R]$, $\exists[É \& R]$.

H: Ubulra hallgat,
É: éretlen,
R: rosszul jár.

A két premissza közös Venn-diagramja a *10. ábrán* látható. A konklúzió szerint *É* és *R* közös részében létezési jelnek kellene lennie, de nincs. A következtetés nem helyes. („Józan ésszel": a premisszák igazak lehetnek akkor is, ha senki sem hallgat Ubulra. Ha még fölvennénk egy ilyen pótpremisszát: 'Van valaki, aki hallgat Ubulra', az így módosított következtetés már helyes lenne.)

10. ábra



10. példa. Ellenőrizzük ezt a következtetést:

Premisszák: A versenyzők közül egyetlen francia sem jutott be a döntőbe. Denise, aki francia, egyike a versenyzőknek.

Konklúzió (?): Van olyan versenyző, aki nem jutott be a döntőbe.

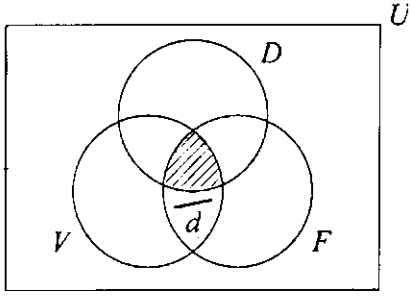
Formalizálva:

$$\sim\exists[V \,\&\, F \,\&\, D],\ [Fd \,\&\, Vd],\ \exists[V \,\&\, \sim D].$$

V: versenyző,
F: francia,
D: döntőbe jutott,
d: Denise.

A 11. ábrán, az első premissza információja szerint, bevonalkáztuk a három kör közös részét. A második premisszát követve, *V* és *F* fehéren maradt közös részében elhelyeztük *d*-t. A konklúzió szerint *V*-nek a *D*-n kívüli része nem üres. Ezt a diagram igazolja, hiszen e tartományban van *d*. A következtetés helyes.

11. ábra



Van eldöntési eljárásunk azon formulák körében is, amelyek egyrétű formulák igazságfunktorokkal való összekapcsolásával nyerhetők, mint például

$$\forall[F \supset (G \vee H)] \supset \exists[G \,\&\, \sim F].$$

Ha a vizsgált formulahalmazban ilyen formulák is vannak, akkor a kielégíthetőség vizsgálatát analitikus táblázattal kezdjük (a konjunkciókat persze táblázat nélkül is szétszedhetjük tagjaikra), de a kvantoros formulákat nem bontjuk le (származék nélkülieknek tekintjük őket). Ezután minden egyes nyitott ágon (ha van ilyen) külön-külön összegyűjtjük a felbontatlan kvantoros formulákat, és Venn-diagrammal ellenőrizzük kielégíthetőségüket. Ez véglegesen eldönti, hogy az ág nyitott-e, vagy zárt. Ezt minden ágra elvégezve, választ kapunk arra, hogy formulahalmazunk kielégíthető-e.

Valójában minden olyan (véges) formulahalmaz kielégíthetősége eldönthető, amelynek elemeiben csak egyargumentumú predikátumok fordulnak elő. Ugyanis az egyargumentumú predikátumok körében a kvantor hatókörébe ágyazott kvantorok kiküszöbölhetők. Például (T43) szerint:

$$\forall x[A(x) \supset \exists y.B(y)] \Leftrightarrow \exists x.A(x) \supset \exists y.B(y),$$

föltéve hogy $B(y)$-ban x-nek már nincs szabad előfordulása. (Az átalakítás után "$\exists y.B(y)$" helyett "$\exists x.B(x)$" írható.) A kiküszöbölés után már csak egyrétű formulák maradnak, esetleg igazságfunktorokkal összekapcsolva; ilyenekre pedig, a fentiek szerint, van eldöntési módszerünk a kielégíthetőség – s egyben a következményreláció – vizsgálatára.

Az analitikus táblázat módszere a most említett esetekben persze „tisztán" is célravezető, de a Venn-diagramok fölhasználása egyszerűbbé és szemléletesebbé teheti munkánkat.

A Venn-diagrammok módszere alkalmas Arisztotelész logikai vizsgálódásaiból az úgynevezett *kategorikus szillogizmusoknak* a modern logikai elemzésére.

Arisztotelész a filozófiai műveit bevezető *Organon* (szerszám, eszköz, átvitt értelemben módszer) című gyűjtemény harmadik részében, az *Első Analitikában*, következtetési sémák viszonylag széles körét vizsgálta végig rendszeresen, kiválasztva a helyes és cáfolva a hibás következtetéseket. Kifejtése során lényegesen felhasználta a matematikából átvett axiomatikus módszert, és már betűparamétereket is használt a logikai törvények általánosságának kifejezésére. Miután kétezer éven keresztül ezzel az elmélettel, illetve későbbi átdolgozásával, a tradicionális logikával azonosították a logikát, vagy legalábbis az úgynevezett formális logikát, és ennek következtében a tradicionális logika terminológiájával és fogalomrendszerével még ma is találkozhatunk, hasznos lesz megismerkednünk Arisztotelész *eredeti* logikai elméletének alapelemeivel.

Már a 7.3. szakaszban említettük, hogy Arisztotelész logikai vizsgálatai az ún. *kategorikus állításokra* összpontosultak. Illusztráljuk az idetartozó négy típust egy-egy példával, feltüntetve logikai szerkezetüket is. (A predikátumokat kezdőbetűikkel rövidítjük, a kvantifikált változó kiírását mellőzzük, a 10.3. szakaszban kialakított gyakorlat szerint.)

(1)	Minden ember halandó.	$\forall(E \supset H)$
(2)	Némely görög filozófus.	$\exists(G \,\&\, F)$
(3)	Egyetlen athéni sem spártai.	$\forall(A \supset \sim S)$
(4)	Némely filozófus nem görög.	$\exists(F \,\&\, \sim G)$

Az arisztotelészi grammatika szerint ezen állítások szerkezete a következő: *alany, állítmány* (azaz az első és a második predikátum) és az alanyhoz kapcsolódó *mennyiségjelző* (azaz a kvantorszó). A nyelvi forma nem mutatja a kondicionálist, illetve a konjunkciót, de jelzi a negációt.

A szimbolikus logika kialakulása előtti *tradicionális* logikában ezeket a formákat, lényegében a természetes nyelv grammatikája szerint, így elemezték: Az ítéletek ('állítás' helyett az 'ítélet' terminust kedvelték) szubjektumból és predikátumból állnak. (Latinul alany: *subiectum*, állítmány: *praedicatum*, de ennek a predikátumfogalomnak kevés köze van a könyvünkben használt predikátum fogalmához.) Az ítéletek mennyiség tekintetében kétfélék: általánosak, mint (1) és (3), vagy részlegesek, mint (2) és (4), aszerint hogy a predikátumot a szubjektum *egész* terjedelmére vagy csak egy részére vonatkoztatjuk. Minőség tekintetében ugyancsak kétfélék, éspedig állítóak, mint (1) és (2), vagy tagadóak, mint (3) és (4), aszerint hogy a predikátumot állítjuk vagy tagadjuk a szubjektumról. A szubjektumot nem lehet tagadni, mint ahogy a természetes nyelvi megfogalmazás valóban az állítmány elé szokta tenni a tagadószót. Csakhogy a fenti sémákból a szubjektum negálásával adódó állítások igen fontosak lehetnek; persze ezeket más nyelvi formákkal (mellékmondat, alany és állítmány megcserélése stb.) fejezzük ki. Már ez a téma is mutatja, mennyire alkalmatlan a természetes nyelvtan fogalomrendszere a logikai elemzés számára: megkülönbözteti azt, amit nem kellene (teljesen azonos logikai természetű és szerepű kifejezéseket, mint a 'görög' és a 'filozófus' szavak a (2) állításban), és megkülönböztetés nélkül egy zsákba rak teljesen különböző dolgokat (ha egyedi név áll az alany helyén, az éppúgy szubjektum, mint a fenti példákban az alany szerepében fellépő – mai értelemben vett – predikátum).

Tehát a vizsgált állítástípusok, az úgynevezett *kategorikus ítéletek* rendszere a következő (feltüntetjük hagyományos betűjelüket is):

Elnevezés	Formula	Jel
1. Általános állító	$\forall(F \supset G)$	**a**
2. Részleges állító	$\exists(F \& G)$	**i**
3. Általános tagadó	$\forall(F \supset \sim G)$	**e**
4. Részleges tagadó	$\exists(F \& \sim G)$	**o**

Itt F és G interpretálatlan paraméterek. Természetesen ebbe a négy sémába nem célszerű belegyömöszölni akár csak az egyargumentumú predikátumok elméletébe tartozó összes állítást sem; például egy $\forall[(F \vee G) \supset H]$ alakú állítás szubjektumát, az "$F \vee G$" kifejezést nem célszerű felbontatlanul hagynunk, ha egy másik vizsgált állításban G nem szerepel, csak F. Még inkább hibás olyan kijelentéseket, mint 'Szókratész halandó', az **a** típusba sorolni.

Arisztotelész munkájából kitűnik, hogy elméletének korlátaival maga is tisz-

tában volt; több olyan problémát említ, amelyben nem kategorikus állítások szerepelnek. A legutóbb említett hibába pedig ő még nem esett bele, mert következtetéselméletében neveket tartalmazó állításokat sehol sem szerepeltetett. Elméletét nem fejlesztették tovább az általa fölvetett, de meg nem oldott problémák irányába, viszont állandó iskolapéldaként szerepeltették ezt a következtetést: „Minden ember halandó, Szókratész ember, tehát Szókratész halandó", noha ez valójában nem kategorikus állításokból áll. Ez arról tanúskodik, hogy mennyire megmerevítették és félreértették sok száz éven keresztül Arisztotelészt.

A kategorikus állítások tanulmányozását valóban Arisztotelész kezdte meg, és az említett négy típust is ő vezette be; ám szerepük és jelentőségük egyoldalú eltúlzása nem az ő műve.

A kategorikus szillogizmusok a tradicionális logika alapvető következtetési sémái. (Arisztotelész a helyes kategorikus szillogizmusoknak megfelelő feltételes állítás-sémákat nevezte szillogizmusoknak, a 'kategorikus'-nak megfelelő jelzőt pedig nem használt.) Kategorikus szillogizmus egy következtetési séma, ha eleget tesz a következő kikötéseknek:

I. Mind a premisszák – sorrendben a felső (a nagyobb) és az alsó (a kisebb) tétel –, mind a konklúzió kategorikus állítások.

II. A premisszákban előforduló két-két fogalom (predikátum) közül az egyik közös, ez a középfogalom; amelyik csak a felső (nagyobb) tételben fordul elő, az a főfogalom, amelyik pedig csak az alsóban (a kisebben), az az alfogalom.

III. A zárótétel alanya az alfogalom, állítmánya a főfogalom.

Arisztotelész azt tekintette feladatának, hogy az összes lehetséges ilyen séma közül kiválassza a helyeseket. Ha tekintetbe vesszük azt a ki nem mondott föltevését, hogy egy fogalom terjedelme sohasem lehet üres, akkor eredményei kifogástalanok. Ha ezt a korlátozást elvetjük, akkor Arisztotelész helyesnek minősített szillogizmusai közül néhányat ki kell egészíteni egy-egy létezési pótpremissza felvételével. Azok az esetek, amelyeket Arisztotelész elvetett, valóban mind hibás következtetések, és nem is javíthatók kézenfekvő módon.

Arisztotelész *módszere* az volt, hogy a szillogizmusok helyességét először külön-külön érveléssel bizonyította, a hibásakat pedig cáfoló interpretáció megadásával szűrte ki. Ezek után a helyes szillogizmusokat még két, axiómának tekintett („tökéletes") szillogizmusból is levezette. Ezeket a következő alakban írhatjuk fel:

$$\begin{array}{ll} 1. \ \forall(F \supset G) & 2. \ \forall(F \supset \sim G) \\ \underline{\forall(H \supset F)} & \underline{\forall(H \supset F)} \\ \forall(H \supset G) & \forall(H \supset \sim G) \end{array}$$

Arisztotelész elmélete mind eredményeit, mind módszerét tekintve az európai tudomány hajnalának egyik kiemelkedő teljesítménye. Elsőnek oldotta meg a helyes következtetés problémáját az állítások egy meghatározott körében.

Helytálló eredményei – korszerűbb megfogalmazásban – részét alkotják mai logikai tudásunknak is. Az arisztotelészi következtetéseket ma legegyszerűbben a Venn-diagramok módszerével vizsgálhatjuk.

Ellenőrző kérdések

10.1. Milyen összefüggés van a formulák analitikus táblázata és a formulák (együttes) kielégíthetősége között?

10.2. Mikor mondjuk az analitikus táblázat egy ágát zártnak? És az egész táblázatot?

10.3. Mely formuláknak vannak konjunktív és melyeknek alternatív származékaik? Hogyan alkalmazzuk ezt a megkülönböztetést az analitikus táblázat készítésekor?

10.4. Mi a különbség a zárt és a befejezett ág között?

10.5. Hogyan ellenőrizzük analitikus táblázattal a következményreláció fennállását, azaz egy következtetés helyességét?

10.6. Mit tudunk a kvantoros formulák származékairól?

10.7. Mit tudunk az azonossági formulák származékairól?

10.8. Milyen korlátai vannak a kvantoros formulák körében az analitikus táblázat elkészítésének?

10.9. Milyen formulák körében alkalmazhatunk Venn-diagramokat a kielégíthetőség vizsgálatára?

10.10. Hogyan ábrázoljuk a nyitott, illetve a zárt formulákat Venn-diagramon?

10.11. Mi a kielégíthetetlenség jele a Venn-diagramon?

10.12. Hogyan ellenőrizzük a következtetés helyességét a Venn-diagramon?

Gyakorló feladatok

10.1. Készítsük el az alábbi formulák analitikus táblázatát (külön-külön)! Kommentáljuk az eredményt! [10:1,2,3,4.]

a) $(p \supset q) \,\&\, \sim q \,\&\, p$

b) $(p \supset (q \supset r)) \,\&\, (p \supset q) \,\&\, p \,\&\, \sim r$

c) $\sim ((p \,\&\, q) \supset p)$

d) $\sim (q \supset r) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r)))$

10.2. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi formulák logikai igazságok (érvényesek)! [9.9, 10:1,2,5.]

a) $p \supset (q \supset p)$

b) $\sim q \supset (q \supset p)$

c) $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (\sim r \supset \sim p))$

10.3. Az 5.15. feladatban szerepeltek a következő mondatok:

c) Ha várakozás nélkül kapok reggelit, akkor – föltéve, hogy nem alszom el – nyolc órára megérkezem.

d) Ha elalszom, nem kapok várakozás nélkül reggelit.

e) Ha nem alszom el, akkor reggelit is várakozás nélkül kapok, és meg is érkezem nyolc órára.

Tekintsük *c)*-t és *d)*-t premisszáknak, és harmadikként vegyük még hozzájuk a következőt:

b) Ha nyolc órára megérkezem, várakozás nélkül kapok reggelit.

Következik-e a *b), c), d)* premisszákból az *e)* állítás? [10.5.]

10.4. Vegyük az alábbi mondatokat:

f) Ha ünnepély lesz, a tanítás délben véget ér.

g) Ha osztályfőnöki óra lesz, a tornaóra elmarad.

h) A tanítás nem ér véget délben, pedig ünnepély vagy osztályfőnöki óra lesz.

Következik-e ezekből, hogy: 'A tornaóra elmarad'? [10.5.]

10.5. Az 5.15. feladat végén ez a két bonyolult állítás szerepelt:

i) Ha a szemtanú megbízható, és az írásszakértő véleménye helytálló, úgy a bűncselekményt akkor és csak akkor követték el előre megfontolt szándékkal, ha a talált ujjlenyomat a tettestől vagy esetleges bűntársától származik.

j) Ha a szemtanú megbízható, az írásszakértő véleménye helytálló, és a talált ujjlenyomat a tettestől származik, akkor a bűncselekményt előre megfontolt szándékkal követték el.

Következik-e e két állítás valamelyikéből a másik? [10.5.]

10.6. Egy készülék használati utasításában a következőket olvastuk:

a) A kapcsoló benyomásakor a védőellenállás lekapcsolódik, és a készülék feszültség alá kerül.

b) Ha a 'Rajt' feliratú gombot megnyomjuk, és a készülék feszültség alatt áll, a felvétel elindul.

Mi történik, ha a kapcsolót is és a 'Rajt' feliratú gombot is benyomjuk? Indokoljuk válaszunkat analitikus táblázat készítésével! [10.1.]

10.7. Helyes-e ez a következtetés?

Premisszák: Ha a jelzőlámpa ég, és a páratartalom normális, akkor a készülék működik.
A jelzőlámpa ég, ám a készülék nem működik.

Konklúzió: A páratartalom nem normális.

10.8. Helyes-e ez a következtetés?

Premisszák: Ha az ellenállás növekszik, akkor az áramerősség csökken, feltéve hogy a feszültség állandó.
A feszültség állandó, és az áramerősség nem csökken.

Konklúzió: Az ellenállás nem növekszik.

10.9. Igazoljuk (analitikus táblázattal) az alábbi következtetés helyességét:

Premisszák: Ha mama elzárta a macskát, akkor a tejfölnyaló gyermek volt, és fölmászott a polcra.
Ha a tejfölnyaló fölmászott a polcra, és elhagyta a papucsát, csak Ancsa lehetett.
Mama elzárta a macskát, és a tejfölnyaló elhagyta a papucsát.

Konklúzió: A tejfölnyaló csak Ancsa lehetett.

10.10. Helyes-e a következtetés?

Ha Péter zenét hallgat, a szomszédok őrjöngenek, mindenki mindenkivel összevész. Vagyis ha Péter zenét hallgat, akkor mindenki mindenkivel összevész.

10.11. Helyes-e a következtetés?

Ha elmegyünk kirándulni, majdnem biztosan elázunk. Ha majdnem biztosan elázunk, inkább otthon maradunk. Ha otthon maradunk, jönnek a rokonok, és el van rontva a vasárnapunk. Tehát nem megyünk kirándulni, vagy jönnek a rokonok és el van rontva a vasárnapunk.

10.12. Következménye-e a $[(\sim p \vee q) \ \& \ (p \supset q)]$ premisszának a q kifejezés?

10.13. Könyvrészlet:

A: A haladás és a változás elkerülhetetlen, és ezek az emberek a haladás útjában állnak.

B: És mi erre a megoldás? – kérdeztem. – Pusztítás.

A: Ha rábírhatók a változásra, akkor nem. Megvan az esélyük a túlélésre.

B: Vagyis semmi esélyük sincs.

Következik-e az első három állításból a negyedik állítás?

10.14. Az alábbi következtetés helyességét a kvantifikációs láncszabállyal (és néhány ekvivalens átalakítással) igazolhatjuk. (Lásd a 7.4. szakaszban kidolgozott példát.)

Premisszák: Egyetlen nő sem kapott blokkot.
Mindenki vagy klubtag, vagy vendég.
A klubtagok fizettek.
A vendégek valamennyien ebédeltek.
Aki fizetett, az blokkot kapott.

Konklúzió: Minden nő ebédelt.

10.15. Vizsgáljuk meg Venn-diagrammal az alábbi következtetések helyességét! [10:9,10,11, 12.]

a) Premisszák: Aki logikából megbukott, az elsőéves.
Aki logikából megbukott, köteles utóvizsgát tenni.
Egyetlen elsőéves sem köteles utóvizsgát tenni.

Konklúzió: Senki sem bukott meg logikából.

b) Premisszák: Aki logikát vagy pedagógiát tanul, filozófiát is tanul.
Egyesek, akik filozófiát tanulnak, nem tanulnak pedagógiát.
Konklúzió: Vannak olyanok, akik logikát tanulnak, de pedagógiát nem.
c) Premisszák: Néhány kitüntetett kedvence az elnöknek vagy az igazgatónak.
Az igazgató kedvencei közül csak olyanokat tüntettek ki, akik az elnöknek is kedvencei.
Konklúzió: Az elnök kedvencei között akad kitüntetett.
d) Premisszák: Minden színjátszó, aki részt vesz a tanfolyamon, főiskolás.
A tanfolyam néhány résztvevője színjátszó vagy főiskolás.
Konklúzió: Van olyan főiskolás, aki részt vesz a tanfolyamon.
e) Premisszák: Egyetlen tanár sem fizikai dolgozó.
A bizottság néhány tagja tanár.
Konklúzió: A bizottság néhány tagja nem fizikai dolgozó.
f) Premisszák: Minden gitáros tagja a szakkörnek.
A szakkörben nincs sakkozó gitáros.
Alajos gitáros.
Konklúzió: Alajos szakköri tag, de nem sakkozó.

10.16. Vizsgáljuk meg Venn-diagrammal, hogy az alábbi következtetési sémák közül melyek helyesek, melyek nem! [10.12.]

a) $\{\sim \exists[Gx \,\&\, Hx), \exists x[Fx \,\&\, Gx]\} \Rightarrow \exists x[Fx \,\&\, \sim Hx)$.

b) $\{\forall x[Gx \supset \sim Hx), \forall x[Gx \supset Fx)\} \Rightarrow \exists x[Fx \& \sim Hx]$.

c) $\{\forall x[Hx \supset Gx), \forall x[Gx \supset Fx)\} \Rightarrow \exists x[Fx \,\&\, Hx)$.

10.17. Helyes-e a következtetés?

Minden diák tanul. Az emberek többsége nem diák. Tehát az emberek többsége nem tanul.

(Venn-diagrammal döntendő el.)

10.18. Helyes-e ez a következtetés?

Egyetlen bolygónak sincs saját fénye. A Nap nem bolygó, tehát a Napnak van saját fénye.

10.19. Igazolja a következtetés helyességét kvantifikációs láncszabállyal:

Aki nem tanul, az tudatlan marad.
Aki tanul, az érvényesül.
Csak a lusták maradnak tudatlanok.
Aki érvényesül az sikeres.
Tehát aki nem lusta, az sikeres.

10.20. Helyes-e a következtetés?

A kör kúpszelet. Tehát aki kört rajzol, kúpszeletet rajzol.

10.21. Az alábbi következtetési példa is Lewis Carrolltól, az Alice-mesék szerzőjétől származik. Igazoljuk helyességét!

Premisszák: Az óvodások nem következetesek.
Senkit sem becsülnek le, aki krokodillal tud bánni.
A következetleneket lebecsülik.

Konklúzió: Óvodások nem tudnak krokodillal bánni.

11. FOGALMAK ÉS KAPCSOLATAIK

A 3.3. szakasz elején futólag említettük, hogy az interpretált (és szükség esetén értékelt) funktorok intenzióit általános fogalmaknak szokás nevezni, az egyedi leírások intenzióját pedig egyedi (individuális) fogalmaknak. E fejezetben a fogalmak logikailag megragadható sajátságaival és kapcsolataival foglalkozunk.

A 'fogalom' szó köznapi használatában többnyire valamire vonatkozó ismeretet (néha csak elképzelést), tudást jelent. 'Van valamelyes fogalma a nyitvatermőkről' kb. azt jelenti, hogy tud egyet-mást a nyitvatermő növényekről. Hasonlóan, 'fogalma sincs a négyzetgyökvonásról' annak kifejezésére szolgál, hogy semmit sem tud a négyzetgyökvonás műveletéről. E szóhasználatban egy-egy fogalom általában több, mint valamely funktor intenziója, de az utóbbit is magában foglalja. Aki tud valamit a nyitvatermőkről, az valamelyest ismeri a 'nyitvatermő növény' predikátum intenzióját is, és aki semmit sem tud a négyzetgyökvonásról, az nyilvánvalóan nem ismeri a négyzetgyökvonás funktorának intenzióját.

A szaktudományokban a 'fogalom' terminust lényegében abban az értelemben használják, ahogyan azt a modern logika felfogja. Kevés kivételtől eltekintve, általános fogalmakról van itt szó, s ezek nyelvi kifejezési formája – a logikai grammatika szerint vizsgálva – mindig funktor, a hozzá kapcsolódó fogalom pedig éppen e funktor tudományosan pontosított jelentése, azaz intenziója.

Amit a logika a fogalmakról mondani tud, az a pedagógiai gyakorlatban is megszívlelendő és hasznosítható, mert – szerencsére – nem befolyásolja az, hogy a logika és a pedagógiai szakirodalom nem teljesen azonos értelemben használja a 'fogalom' terminust.

11.1. A FOGALMAK FONTOSABB TÍPUSAI

A mondatintenziók kivételével minden kifejezés konkrét intenzióját fogalomnak nevezhetjük. Természetesen a többértelmű kifejezésekhez különböző, az elmosódó jelentésűekhez pedig elmosódó, „homályos" fogalmak csatlakozhatnak, az értékelendő alkatrészeket tartalmazó kifejezések esetén pedig az értékelés is elengedhetetlen a konkrét intenzió, azaz a fogalom rögzítéséhez.

A fogalmakról mint absztrakt dolgokról beszélünk (akárcsak a számokról); ezek a nyelvhasználat és a gondolkodás társadalmilag rögzült alkotásai – ahol szükséges, a szaktudományok pontosításával kiegészülve. Jelen vannak – esetenként torzult vagy finomí-

tott formában – az egyének gondolatvilágában és a társadalmi köztudatban. Nem pusztán nyelvhasználati szabályok, hanem ismereteket is foglalnak magukban a világról, hozzájárulnak a tervező-alkotó gondolkodáshoz, az eredményes gondolatközléshez, de a mindennapi tevékenységhez is.

A fogalmak „mibenlétének", lét- és ismeretelméleti helyének vizsgálata nem a logika feladata. A logikában a nyelvi kifejezési forma közvetítésével vizsgáljuk őket. A köztük lévő kapcsolatok megállapítása is többnyire a logikán kívül eső feladat. A logikára a lehetséges kapcsolatok típusainak feltárása és rendszerezése marad.

A fogalmak típusai tekintetében mindenekelőtt megkülönböztetünk *egyedi* és *általános* fogalmakat. Előbbiek a nevek, utóbbiak a funktorok intenziói.

Tulajdonnévnek csak akkor van intenziója, ha valamely *leírást* rövidít. *Az egyedi fogalmak* tehát általában a leírások (konkrét) intenziói. Tudományos szempontból kisebb jelentőségűek, hiszen a tudomány többnyire „az általános" vizsgálatával foglalkozik. A következő leírások egyedi fogalmak kifejezői:

A fény sebessége vákuumban.
Bármely kör kerületének és átmérőjének hányadosa.
A jelenlegi török szultán.
A Föld legnépesebb állama.

Közülük az elsőt a '*c*', a másodikat a 'π' jellel mint tulajdonnévvel szokás rövidíteni.

Az általános fogalmak a funktorok konkrét intenziói. Két nevezetes alosztályukat emeljük ki (amelyek pedagógiai szempontból is fontosak).

*Predikatív fogalmak*nak mondjuk a predikátumok (konkrét) intenzióit. Ezeket tovább lehet osztályozni a predikátumok argumentumszáma szerint. A gyakorlati alkalmazás szempontjából legfontosabbak az egy- és a kétargumentumú predikátumokhoz kapcsolódó fogalmak.

Az egyargumentumú predikátumok egy része – a természetes nyelv grammatikája szerint – *főnév* jellegű (egyedi főnév, esetleg jelzővel vagy jelzői mellékmondattal bővítve). Ezek, határozott névelővel (és esetleg többes számban) fajtanevekként is funkcionálnak (például *a lovak, az emberek, a diákok, a székek, a telefonkészülékek, a téglalapok* stb.). A fajtanév vonatkozhat természeti fajtára, ember alkotta tárgyak egy fajtájára, embercsoportokra (a társadalmi életben betöltött valamely szerepük szerint) vagy absztrakt dolgok valamely összességére. (A 'fajta' szót itt nem az élővilág osztályozásában szokásos értelemben használjuk, hanem minden hierarchia nélkül, például 'az emlősök', 'a kutyák', 'a pulik' itt egyaránt fajtaneveknek számítanak. A fajtanév lehet melléknév eredetű is, például *a gerincesek, a patások, a diplomások.)* Az egyedi objektumok fajták szerinti csoportosítása fontos fogódzó a világban való tájékozódásban, s ezért a fajtanevek, illetve a hozzájuk kapcsolódó általános fogalmak – *a fajtafogalmak* – kiemelkedő jelentőségűek a pedagógiai munkában. Logikai sajátságaik tekintetében azonban semmi sem különbözteti meg őket a *tulajdonságfogalmaktól*, ame-

lyek többnyire melléknévi és igei alakú egyargumentumú predikátumok intenziói. (Például kék, érdes, rugalmas, mozog, fut, gyorsul.) Nem is húzható éles határ a fajta- és tulajdonságfogalmak között.

A két- és a többargumentumú predikátumok intenzióit általánosan *relációknak* (vagy relációs fogalmaknak) mondjuk, hiszen az ilyen predikátumok segítségével fejezzük ki az egyedi objektumok közötti kapcsolatokat, viszonyokat, azaz relációkat.

Az általános fogalmak másik fontos típusát alkotják a *műveleti (vagy funkcionális)* fogalmak; ezek nem mások, mint *a névfunktorok intenziói* (lásd 2.5. szakasz és 3.3. szakasz). Kiemelkedő szerepük van a matematikában. Legismertebb esetük a számnevekből számneveket képező funktorok intenziói, azaz az aritmetikai műveleti fogalmak (összeadás, szorzás stb.). A pedagógiai munkában tehát nemcsak predikatív, hanem műveleti fogalmakkal is akad dolgunk.

11.2. SZÜKSÉGSZERŰSÉG ÉS LEHETŐSÉG

Mivel a fogalmak (logikai értelemben) *intenziók*, a köztük lévő logikai kapcsolatok feltárására, sejthetően, csak az intenzionális logikában kerülhet sor. Tankönyvünk azonban az extenzionális logikára korlátozódik. Szerencsére, egy intenzionális mondatfunktor bevezetése elég ahhoz, hogy az intenziók közötti néhány fontos összefüggést megfogalmazhassunk.

E célra megfelel a 'lehetetlen, hogy' mondatfunktor, amelyet a 3.3. szakaszban példaként említettünk mint *intenzionális* mondatfunktort. Egy "lehetetlen, hogy p" szerkezetű mondat akkor és csak akkor igaz, ha a p mondat igazságát a természet vagy a nyelvhasználat törvényei kizárják. Vezessük be a következő mondatfunktorokat:

Szükségszerű, hogy $p \Leftrightarrow$ Lehetetlen, hogy $(\sim p)$.
Lehetne úgy, hogy $p \Leftrightarrow \sim$ (lehetetlen, hogy p).

(E funktorokat többé-kevésbé ennek megfelelően használjuk a köznapi beszédben is. A továbbiakban a most rögzített jelentésükhöz ragaszkodunk.) A logikai szakirodalomban az első rövidítésére a '$\Box$', a második rövidítésére a '$\Diamond$' szimbólumot használják. Azaz:

$\Box p \Leftrightarrow$ szükségszerű, hogy p.
$\Diamond p \Leftrightarrow$ lehetne úgy, hogy p.

A kiindulásul vett "lehetetlen, hogy p" ezek segítségével kétféle módon is kifejezhető: egyrészt mint "$\sim \Diamond p$", másrészt mint "$\Box \sim p$". A két kifejezés persze logikailag ekvivalens:

(1) $\sim \Diamond p \Leftrightarrow \Box \sim p$.

Ami lehetetlen, az hamis is, azaz:

(2) $\sim \Diamond p \Rightarrow \sim p$.

Ebből kontraponálással kapjuk, hogy

(3) $p \Rightarrow \Diamond p$.

(Ami igaz, az nem lehetetlen, tehát lehetséges.) Írjunk (1)-ben p helyére "$\sim p$"-t, és a jobb oldalon töröljük a fellépő kettős negációjelet:

(4) $\sim \Diamond \sim p \Leftrightarrow \Box p$.

(Tehát '$\Box$' kifejezhető '$\Diamond$' és '$\sim$' segítségével.) Vegyük most (1) mindkét oldalának negációját, és a bal oldalon töröljük a kettős negációjelet:

(5) $\Diamond p \Leftrightarrow \sim \Box \sim p$.

(Azaz, '$\Diamond$' is kifejezhető '$\Box$' és '$\sim$' segítségével.) Végül helyettesítsük (2)-ben p-t "$\sim p$"-vel:

$\sim \Diamond \sim p \Rightarrow \sim \sim p$.

A jobb oldalon '$\sim \sim$' törölhető, a bal oldal pedig, (4) szerint, helyettesíthető "$\Box p$"-vel. Tehát:

(6) $\Box p \Rightarrow p$.

(Ami szükségszerű, az igaz.)

Logikai eszköztárunk eme kibővítését hasznosítjuk az intenziók közötti logikai kapcsolatok feltárásában.

11.3. PREDIKATÍV FOGALMAK KAPCSOLATAI

Legyenek F és G azonos argumentumszámú (extenzionális) predikátumok. Azt mondjuk, hogy F *intenzionálisan alárendelt* G-nek – és, szinonim módon, G *intenzionálisan fölérendelt* F-nek –, ha szükségszerű, hogy F terjedelme része G terjedelmének. Ha a predikátumok argumentumszáma n, ezt a következő formulával fejezhetjük ki:

$$\Box\forall x_1 \ldots \forall x_n [F(x_1)\ldots(x_n) \supset G(x_1)\ldots(x_n)].$$

Az $n = 1$ esetben:

$$(7)\quad \Box\forall x[F(x) \supset G(x)].$$

Az előző szakasz (6) törvénye szerint ebből

$$(8\quad \forall x[F(x) \supset G(x)]$$

következik. A (8) formula tartalmát úgy fejezhetjük ki, hogy *F extenzionálisan alárendelt G*-nek. Az intenzionális alárendeltségből folyik az extenzionális alárendeltség, fordítva azonban nem. Legyen például *F:* magyar miniszter, *G:* 70 éven aluli. Ekkor *F* terjedelme része *G* terjedelmének, tehát (8) aktuálisan igaz (jelenleg minden magyar miniszter 70 éven aluli), de (7) hamis (hiszen az említett tény nem szükségszerű).

Azon, hogy egy predikatív fogalom alárendelt egy másiknak, a fentiek folytán azt kell értenünk, hogy az első fogalmat kifejező predikátum *intenzionálisan alárendelt* a másik fogalmat kifejező predikátumnak. A pedagógiai gyakorlatban többnyire egyargumentumú predikátumok intenziói (és főleg fajtafogalmak) szerepelnek az alá-fölé rendeltség kapcsolatában. A kapcsolat extenzionális vagy intenzionális voltáról nem szokott szó esni; de kívánatos, hogy legalább a pedagógus fejében tiszta kép legyen a különbségről. Az intenzionális alárendeltség törvényszerűséget, a pusztán extenzionális alárendeltség pedig csak olyan tényt fejez ki, amely esetleg véletlen jellegű.

Két – azonos argumentumszámú – predikátumot *intenzionálisan ekvivalensnek* mondunk, ha kölcsönösen intenzionális alárendeltjei egymásnak. Ekkor a predikátumok kifejezte fogalmakat ekvivalenseknek mondjuk. Ha *F* és *G* egyargumentumú predikátumok, intenzionális ekvivalenciájukat a következő séma szerint fejezhetjük ki:

$$\Box\forall x[F(x) \equiv G(x)].$$

Ekvivalens fogalmakra példa a következő néhány fogalompár:

egyenlő oldalú háromszög – egyenlő szögű háromszög,
kutya – eb,
egyenlő oldalú téglalap – derékszögű rombusz,

Nem ekvivalens azonban a következő két fogalom:

18 éven felüli – nagykorú.

E két fogalom terjedelme (magyar állampolgárokra korlátozva) a jelenlegi jogszabályok szerint egybeesik (fönnáll az *extenzionális* ekvivalencia esete), de az egybeesés nem szükségszerű. (A második világháború előtt például a 24. életév volt a nagykorúság alsó határa Magyarországon.) A példa arra int, hogy az intenzionális és az extenzionális ekvivalenciát gondosan meg kell különböztetni.

Ha két – azonos argumentumszámú – predikátum terjedelmének közös része üres, akkor *extenzionálisan szétválasztottaknak, diszjunktak*nak mondjuk őket. Ha F és G egyargumentumú predikátumok, diszjunktságukat a

$$\sim \exists x[F(x) \ \& \ G(x)]$$

sémával fejezhetjük ki. Ha F és G terjedelmének nemcsak nincs, de nem is lehetne közös eleme, akkor azt mondjuk, hogy *intenzionálisan diszjunktak.* Ezt (egyargumentumú esetben) a

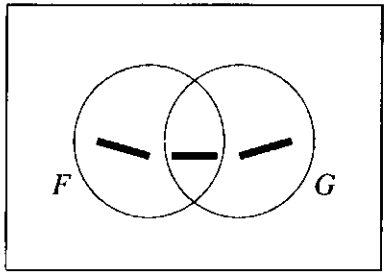
$$\sim\Diamond\exists x[F(x) \ \& \ G(x)]$$

sémával fejezhetjük ki. Két predikatív fogalmat akkor helyes diszjunktnak mondani, ha az őket kifejező predikátumok intenzionálisan diszjunktak. A 'dél-amerikai ország' és az 'ipari-pénzügyi nagyhatalom' predikátumok csak extenzionálisan diszjunktak, intenzionálisan nem. Viszont az 'agglegény' és a 'nős férfi' predikátumok intenzionálisan diszjunktak.

Ha az azonos argumentumszámú F és G predikátumok terjedelmének közös része nem üres, de egyikük sem alárendelt a másiknak (ahogyan a 12. ábra szemlélteti), akkor azt mondjuk, hogy F és G *extenzionálisan keresztező* predikátumok. Egyargumentumú esetben ezt a következő formula fejezi ki:

$$\exists x[F(x) \ \& \sim G(x)] \ \& \ \exists x[F(x) \ \& \ G(x)] \ \& \ \exists x[\sim F(x) \ \& \ G(x)].$$

12. ábra



Azt mondjuk, hogy F és G *potenciálisan keresztezőek,* ha egyikük sem intenzionális alárendeltje a másiknak, és nem diszjunktak intenzionálisan. Ezt az összefüggést a

$$\Diamond\exists x[F(x) \ \& \sim G(x)] \ \& \ \Diamond\exists x[F(x) \ \& \ G(x)] \ \& \ \Diamond\exists x[\sim F(x) \ \& \ G(x)]$$

formulával fejezhetjük ki (ha F és G egyargumentumúak). A 'dél-amerikai ország' és az 'ipari-pénzügyi nagyhatalom' predikátumok (jelenleg) extenzionálisan diszjunktak, ám potenciálisan keresztezőek. A 'mérnök' és az 'orvos' is potenciálisan keresztezőek, noha extenzionálisan bizonyára szétválasztottak. Az előző szakasz (3) törvénye folytán az extenzionális keresztezésből folyik a potenciális keresztezés. Így például mivel a 'rombusz' és a 'téglalap' predikátumok extenzionálisan keresztezőek, potencionálisan is keresztezőek. A 'Mars-utazó' és a 'Vénusz-utazó' predikátumok terjedelméről ma semmit sem tudunk, de – értvén a szavakat – tudjuk, hogy potenciálisan keresztezőek.

A matematikai predikátumok terjedelmébe mindig absztrakt dolgok tartoznak, amelyek az axiómákban előírt összefüggéseknek engedelmeskednek. Ez a magyarázata annak, hogy a matematikai állítások, ha igazak, akkor szükségszerűen igazak. Ennélfogva a matematikai fogalmak kapcsolatai mindig intenzionálisak. A matematikán *belül* ezt nem szokás jelezni, itt nincs értelme igazság és szükségszerűség, extenzionális és intenzionális fogalomviszony megkülönböztetésének.

Megjegyzés. A fogalmak értelmezésével és rendszerezésével kapcsolatban, egyes irodalmi munkákban, még tapasztalható az úgynevezett *hagyományos logika* – a modern szimbolikus logika kialakulása előtti logika – kifejezéseinek használata. Annak érdekében, hogy az olvasó ne legyen teljesen tájékozatlan, ha ilyen kifejezésekkel találkozik, rövid ismertetőt adunk itt a hagyományos logika „fogalomtanáról".

Abszolút általános fogalmaknak kb. azokat a fogalmakat nevezték, amelyeket itt fajtafogalmaknak mondtunk (azaz a főnév alakú egyargumentumú predikátumok intenzióit). *Relatív* általános fogalmaknak mondták a relációkat. (A műveleti fogalmakat nem ismerték.) Főleg az abszolút általános fogalmakkal foglalkoztak. Azt tartották, hogy minden fogalomnak van *terjedelme* és *tartalma;* a terjedelem a fogalom alá sorolt dolgok összessége, a tartalom pedig a fogalom *jegyeinek* összessége. Az előbbi még érthető, az utóbbi – a fogalom jegyei – azonban meglehetősen homályos. Illusztráló példák: A ló fogalmának jegyei, például az, hogy négylábú, emlős, patás stb., a paralelogramma fogalmának jegyei az, hogy szemköztes oldalai párhuzamosak, átlói felezik egymást stb. A példákból az tűnik ki, hogy a fogalmak jegyei is fogalmak (predikátumintenziók); bár többnyire *tulajdonságfogalmak* (a mi szóhasználatunk szerint). Szabatos határvonalat persze nem húztak a fogalmak és a lehetséges fogalomjegyek között. Az illusztrációk fogalmazását az olvasó zavarónak érezheti: *a lovak* patások, de *a ló fogalma* remélhetőleg nem patás; miért mondják hát, hogy a ló fogalmának egyik jegye az, hogy patás? E képzavar is jelzi a fogalomjegy fogalmának homályosságát.

Feltételezték, hogy a legáltalánosabb fogalmak, az úgynevezett *kategóriák* kivételével minden (abszolút általános) fogalomhoz tartozik egy *nemfogalom,* mely terjedelmileg bővebb, tartalmilag szegényebb nála (kevesebb jegye van). A fogalmak hierarchiájának ez az elképzelése még az ókorból származik, és bizonyára az élők világának fajok, törzsek stb. szerinti rendszerezése sugalmazta.

Az iménti elképzeléshez csatlakozik a terjedelem és a tartalom fordított viszonyáról szóló „törvény". Eszerint minél több jegye van egy fogalomnak, annál szűkebb a terjedel-

me. Ezt nyilván az sugalmazta, hogy egy "*Fx & Gx*" alakú predikátum többnyire kevesebb egyedre igaz, mint *F*. (Kivéve persze, ha *F* terjedelme része *G* terjedelmének.) Így kizáródnak például a vagylagos jegyek a fogalomból. Homályban marad, hogyan lehetne a jegyeket összeszámlálni és a törvényt gyakorlati ellenőrzésnek alávetni.

A modern logika ezeket a tradicionális elnevezéseket és a hozzájuk kapcsolódó állítólagos törvényeket nem használja, mert (a) nem szabatosak, (b) szabatosításukra nincs szükség (nem segítik a gondolati munka hatékonyságát), és (c) elhamarkodott általánosítások, amelyek általánosságban vagy értelmetlenek, vagy hamisak.

11.4. A DEFINÍCIÓK

Egy kifejezés – név vagy funktor – *definícióján* (vagy *meghatározásán*), első közelítésben, azt értjük, hogy a kifejezés intenzióját más kifejezésekre való hivatkozással fejtjük ki, magyarázzuk meg. Nem szokás definiálni mondatokat, s érthető, hogy miért nem. Egy mondat intenzióját logikai értelemben vett alkatrészeinek intenziója meghatározza. A grammatika ismerete esetén így csak a nem mondatnyi részek – azaz a nevek és a funktorok – intenziója lehet kérdéses.

Egy definíció logikai szerkezetében három fő alkatrésznek kell szerepelnie:

(i) Az a kifejezés, amelynek intenzióját meg akarjuk magyarázni; *ez a definiendum (a meghatározandó).*

(ii) Az a – többnyire összetett – kifejezés, amely magyarázza a definiendumot; *ez a definiens (a meghatározó).*

(iii) Kötőelem, amely kimondja, hogy a definiendum és a definiens intenziója azonos, és jelzi, hogy ez definíció.

A definiendum szintaktikai kategóriája szerint a definíció logikai szerkezete különböző alakokat ölthet.

Predikátumok definíciója. Tegyük föl, hogy az *n*-argumentumú *F* predikátumot akarjuk definiálni. Töltsük ki *F*-et változókkal mint argumentumokkal ($Fx_1 \ldots x_n$). Definiensként egy *n* változós nyitott mondatot kell választanunk, mondjuk $A(x_1)\ldots(x_n)$-et, és a definíció logikai szerkezete a következő lesz:

$$\text{Def:}\quad \Box\forall x_1\ldots\forall x_n[Fx_1\ldots x_n \equiv A(x_1)\ldots(x_n)].$$

Az egész séma így olvasható ki: 'Definíció szerint szükségszerű, hogy az $x_1, \ldots, x_n$ változók bármely értékelése mellett $Fx_1\ldots x_n$ akkor és csak akkor, ha $A(x_1)\ldots(x_n)$.' A szükségszerűség kimondása biztosítja, hogy a definiált *F* predikátum az

$$A(x_1)\ldots(x_n)$$

predikátummal nemcsak terjedelmileg esik egybe, hanem intenzionálisan is ekvivalens vele. Megállapodunk az alábbi rövidebb jelölésben:

$$Fx_1 \ldots x_n \equiv_{df} A(x_1) \ldots (x_n).$$

Itt a bikondicionális jelének alsó indexeként föllépő 'df' jelzi, hogy definícióról van szó, vagyis hogy a bikondicionális a változók minden értékelése mellett szükségszerűen igaznak számít. A definíció *formailag* akkor szabatos, ha

(a) a definiendumban és a definiensben ugyanazon változók szerepelnek szabadon, és

(b) a definiálandó F predikátum a definiensben nem fordul elő.

A definíció *tartalmilag* akkor helyes, ha a nyelvközösség a definiendumot valóban ugyanabban az értelemben használja, mint a definienst. Tudományos fogalom definíciója esetén a nyelvközösség helyett a szakértők közösségére kell utalnunk. A tartalmi helyesség követelménye csak akkor jöhet számításba, ha a definiendum már rögzített és szabatos értelmű kifejezés. Előfordulhat, hogy a szakember új kifejezést vezet be definícióval, egy hosszabb kifejezés rövidítésére. Ekkor a definíció tartalmilag nem vitatható; kívánatos azonban, hogy az új kifejezés legyen célszerű az illetékes szaktudomány művelése szempontjából, és a nyelvi forma lehetőleg utaljon a definiensre. Az újonnan javasolt tudományos kifejezéseket általában a szakértők bírálata szokta elfogadni vagy elutasítani.

A közlés szempontjából (így a pedagógiai gyakorlatban is) egy definíció akkor célravezető, ha a befogadók a definiensben szereplő kifejezések jelentését már ismerik. Ennek megsértése sajnálatosan gyakori hiba, s még tankönyvekben is előfordul.

A definíciókkal kapcsolatos eme kívánalmak a definíciók egyéb típusaira is értelemszerűen alkalmazandók.

Egyszerű illusztrációként lássuk a 'nagybátyja' predikátum definícióját. Laza fogalmazásban: a nagybácsi a szülő férfitestvére. Tekintsük ismerteknek a 'szülője', 'testvére', 'férfi' predikátumok jelentését. Pontosabb megközelítés: x nagybátyja y-nak, ha x férfi, és x testvére y valamelyik szülőjének. A teljes logikai szerkezet pedig a következő:

(19) x nagybátyja y-nak $\equiv_{df}$ x férfi & $\exists z$ [x testvére z-nek & z szülője y-nak].

Világosan látható, hogy a definiensben csak a három említett predikátum szerepel (és logikai szavak). Definíciónk formailag szabatos: a definiendum nem fordul elő a definiensben, és a definiensben ugyanazon x, y változók szerepelnek szabadon, mint a definiendumban.

A definícióba esetleg az is befoglalható, hogy a szabad változók milyen minimális tárgyalási univerzumban kvantifikálhatók. Esetünkben ez nyilván a személyek halmaza. A definiens kiegészíthető a következő konjunkciós taggal:

x személy & y személy.

Példánkban ez fölösleges pedantériának tűnhet, mert a definiensben szereplő predikátumok jelentése ezt amúgy is sugalmazza. Más esetekben a szabad válto-

zók ilyen „deklarálása" egyáltalán nem fölösleges (példát később mutatunk). Az iskolai oktatásban azonban nem használunk logikai formulákat, hanem verbális definíciókat közlünk. Hogyan lehet például (19)-et verbálisan, de mégis elég szabatosan közölni? Megfelel például a következő fogalmazás:

Azt mondjuk, hogy az x személy *nagybátyja* az y személynek, ha x férfitestvére y egyik szülőjének.

Az 'azt mondjuk, hogy' bevezetés világosan jelzi, hogy *definícióról* van szó. Megfelel a következő fordulat is:

Azon, hogy az x személy *nagybátyja* az y személynek, azt *értjük, hogy*...

Az 'azt értjük, hogy' kitétel is jelzi, hogy definícióról van szó. Ennek tudatosítása azért fontos, mert ha egy mondat nem definíció, akkor a tanulótól kérhetünk érvelést, bizonyítást a mondat igazsága mellett (vagy ellen), definíció esetén azonban ilyen érvelés nem kérhető. Hiszen a definícióval a pedagógus azt közli, hogy milyen értelemben használjuk (illetve kell a tanulónak is használnia) a kifejezést. Értelmetlen volna azt kérdezni, hogy Pistike anyukájának fivére *miért* nagybátyja Pistikének.

A változók használatát a verbális definíciókban néha elkerülhetjük. A fenti példában x és y helyett 'az egyik' és 'a másik' használható. De ha a definiens bonyolult szerkezetű, fölösleges erőltetni a változók elhagyását, mert azzal inkább megnehezítjük a megértést. Mire ilyen definíciókat közölhetünk tanulóinkkal, addigra a matematikában már megismerkednek a változók használatával. Ha pedig a tanulókat már nem zavarják a változók, akkor kívánatos, hogy a nem matematika szakos pedagógust se zavarják.

Az egyargumentumú predikátumok definíciójában többnyire könnyű megszabadulni a változóktól. Néhány példa.

*Ikes igék*nek mondjuk azokat az igéket, amelyek az egyes szám 3. személyben, jelentő mód jelen időben, '-ik' ragot kapnak.

*Páros számok*nak mondjuk azokat az egész számokat, amelyek 2-vel osztha-tók (maradék nélkül).

Cselekvőképteleneknek mondjuk azokat a kiskorú személyeket, akik a 12. életévüket nem töltötték be.

Törzsszámon olyan, 1-től különböző pozitív egész számot értünk, amely csak 1-gyel és önmagával osztható.

Az utóbbi logikai szerkezete:

$$x \text{ törzsszám} \equiv_{df} x \text{ pozitív egész szám } \& \ x \neq 1 \ \&$$
$$\forall y \ [y \text{ osztója } x\text{-nek} \supset (y = 1 \vee y = x)].$$

De hogyan definiálhatnánk a definiensben szereplő 'osztója' relációt? Így:

$$y \text{ osztója } x\text{-nek} \equiv_{df} x \text{ egész szám } \& \ y \text{ egész szám } \&$$
$$\exists z \ [z \text{ egész szám } \& \ y \cdot z = x].$$

Ebben már csak az egész szám és a szorzás fogalma szerepel.

A most felsorolt definíciók mindegyikében szerepel a változók deklarálása (sorra: igék, egész számok, személyek, pozitív egész számok, egész számok). A legtöbb példában ez nem is hagyható el hiba nélkül. A változók deklarálása kijelöli azt a minimális tárgyalási univerzumot (kvantifikációs tartományt), amely a definiendum terjedelmének rögzítésére elegendő. Régebben ezt úgy fogalmazták, hogy egy általános fogalom definiálásakor meg kell adni azt a legközelebbi *nemfogalmat* (genus proximum), amelyhez viszonyítva a definiendum *fajfogalomnak* számít, továbbá azt a megkülönböztető sajátságot (differentia specifica), amely a definiálandó fajt a nemből elkülöníti. Látható, hogy ez a megközelítés is az élővilág osztályozását tekinti mintának, és – szigorúan szólva – legföljebb egyargumentumú predikátumokra lehet alkalmazható. Feltételezi a fogalmak szigorú hierarchiáját (a természet vagy valamely szellemi hatalom bölcs elrendezése következtében), a „legközelebbi nem" egyértelmű meghatározottságát; s ennek folytán egy fogalomhoz csak egyetlen helyes definíciót tűr meg. Mindez azonban előítélet, melynek egyetlen pozitív magja az, hogy a definíciókban (explicit vagy implicit módon) jelezni kell a szabad változóknak a definíció szempontjából szóba jöhető értékeit (egyargumentumú predikátumok segítségével); ez az, amit legszűkebb tárgyalási univerzumnak neveztünk. Számos példája van annak, amikor a definiens többféle módon is választható. Például a négyzet definiálható mint egyenlő oldalú téglalap vagy mint derékszögű rombusz. Melyik hát az igazi „legközelebbi nem", a téglalap vagy a rombusz? Az ember alkotta dolgok fajtái esetén is világos, hogy a „legközelebbi nem" megválasztása a vizsgálati szempont függvénye lehet. A villanyborotva tekinthető testápolási cikknek is, elektromos készüléknek is. (Kapható drogériában is, Keravill-boltban is.)

Az említett előítélet igen zavaróan nyilvánulhat meg a relációk definiálásában. A modern logikát mellőző megközelítésben például az *oszthatóság* fogalmának definiálásakor először is keresgélni kezdik a legközelebbi nemet, és arra akarják rábírni a szakembert: mondja meg, hogy az oszthatóság az egy ez-és-ez. (Ahogyan például a búza az egy gabonaféle.) Nem akarják tudomásul venni, hogy az oszthatóság fogalmát definiálni nem más, mint az 'x osztója y-nak' nyitott mondat értelmét megmagyarázni. A lexikonszerkesztők rögeszméseen ragaszkodnak ahhoz, hogy a címszó az első mondat alanya legyen. Íme egy példa az Új Magyar Lexikonból:

oszthatóság: a *számelmélet* alapvető fogalma. Akkor mondjuk, hogy az a egész szám osztható a b egész számmal, ha van olyan c egész szám, mely b-vel szorozva egyenlő a-val ($b \cdot c = a$).

Itt az első mondat nyilván a lexikonszerkesztőnek tett engedmény. (Talán az oszthatóság legközelebbi neme a számelméleti fogalom?) Ami ez után következik, az már tisztességes definíció (nem más, mint a föntebbi 'x osztója y-nak' konverzének a meghatározása).

A következő riasztó példa is az Új Magyar Lexikonból való:

izotópok: valamely kémiai elem atomjainak azonos magtöltésű, egymástól tömegükben (azaz a neutronok számában) különböző változatai.

A definiensben szereplő fogalmak ismerete nem elég e definíció megértéséhez, s ezért főleg a fogalmazás, a homályos logikai szerkezet a felelős. (A szócikk további magyarázatai nagyjából eloszlatják a homályt.) A fogalmazás azt sugalmazza, hogy *fajtafogalom* meghatározásáról van szó: az 'izotópok' címszó fajtára utal, csakúgy, mint a 'gerincesek' vagy a 'paralelogrammák'. Valójában a definiendum itt is egy *reláció,* melynek alkalmas (változót nem használó) definíciója a következő lehet:

Két atomot *egymás* izotópjának mondunk, ha protonjaik száma azonos, neutronjaik száma különböző.

(A definiált reláció szimmetrikus volta lehetővé tette a változók használatának elkerülését.)

Amikor predikátumot definiálunk, természetesen predikatív *fogalmat* definiálunk, hiszen a definícióban a predikátum *intenzióját* határozzuk meg:

Névfunktorok definíciója. Ha f egy n-argumentumú névfunktor, definíciójának fő logikai szerkezete a következő:

$$fx_1 .. x_n =_{df} \varphi\,(x_1) \ldots (x_n).$$

Az azonosság bal oldala a definiálandó funktorból képezett nyitott név, a jobb oldala pedig olyan nyitott név, amelyben ugyanazon változók szerepelnek szabadon, mint a bal oldalon, és f nem fordul elő benne. Az azonosság úgy értendő; hogy a változók minden megengedett értékelése mellett szükségszerűen igaz. A változók megengedett értékeire vonatkozó feltételt kondicionális előtagként az azonosság elé fűzhetjük, például:

$$x \text{ valós szám} \supset (x^2 =_{df} x \cdot x).$$

Verbálisan: Valós szám *négyzetén* az önmagával való szorzatát értjük. A kötőelem itt nem a bikondicionális jele, hanem az azonosságjel. Ez érthető: a bikondicionális jele mondatokat, az azonosság jele pedig neveket kapcsolhat össze.

A névfunktor-definíciók természetesen *műveleti fogalmak* definíciói.

Individuális fogalom definíciójának sémája:

$$a =_{df} b.$$

Itt a és b grammatikailag *nevek, b* többnyire leírás, melyben az a név természetesen nem fordulhat elő. Alkalmazására viszonylag ritkán kerül sor, és többnyire absztrakt dolgot jelölő név a definiendum. Példák:

$c =_{df}$ a fény sebessége vákuumban.

az Országgyűlés $=_{df}$ az a – választott személyekből álló – testület, amely a Magyar Köztársaság legfelsőbb államhatalmi szerve.

A tudományos definíciók kutatások kiindulópontjai és végeredményei is lehetnek. A definíció elsősorban a pontos, szabatos fogalomhasználatot segíti elő. Ez különösen nagy jelentőségű, amikor adott fogalom körül nagy a fogalomzavar. A politikai életben, parlamenti vitáknál tapasztaljuk, hogy ugyanazon fogalmat hányféleképpen értelmeznek. Pontos, szabatos, kimerítő fogalomdefiníció birtokában, különösen törvényszövegek esetén ezek a viták kiküszöbölhetők vagy lényegesen csökkenthetők lennének.

11.5. PARADOXONOK ÉS LOGIKAI HIBÁK

Paradoxon

Paradoxon (gör. 'hihetetlen, ellentmondásos tétel') általában olyan érvelés, amely ellentmondó vagy a tényekkel összeegyeztethetetlen eredményekhez vezet. A filozófia történetéből ismert paradoxonok közül a legrégebbiek közé tartoznak eleai *Zénón* (i. e. 5. sz.) *aporiái* (gör. 'bizonytalanság', 'kiúttalanság') a mechanikai mozgásról. Első két aporiájában Zénón fölteszi a tér (a távolság) és az idő korlátlan oszthatóságát. (1) A *Dichotomia* ('Felezés') aporiája szerint nem lehet eljutni az *A* pontból a *B* pontba, mert a megteendő táv újból és újból felezhető; az *A* pontnak nincs közvetlen szomszédja az *AB* szakaszon. (2) Az *Akhilleusz és a teknős* aporiájában a gyors lábú Akhilleusz képtelen utolérni a lomha teknőst, ha *d* előnyt ad neki a versenyfutásban. Ugyanis a verseny első szakaszában be kell futnia a *d* távolságot, a második szakaszban azt a $d:q$ távolságot, amelyet ezalatt a teknős megtett (itt q Akhilleusz sebességének és a teknős sebességének hányadosa, így $q > 1$), ... , az $n+1$-edik szakaszban azt a $d:q^n$ távolságot, amelyet a teknős azalatt tett meg, amíg Akhilleusz az n-edik szakasz $d:q^{n-1}$ távolságát befutotta, s i. t. A korlátlan oszthatóság föltevése szerint a $d:q^n$ szakasz sohasem (az n szám bármilyen nagy értéke mellett sem) zsugorodik egy oszthatatlan pontra (tératomra), és a megtételéhez szükséges idő sem csökken egy oszthatatlan időpillanatra (időatomra). Következésképp Akhilleusz csak végtelen sok (bár egyre csökkenő) szakasz befutása árán, és végtelen sok (bár egyre rövidülő) időköz eltelése után érhetné utol a teknőst, azaz (?) sohasem éri utol. (A végtelen sorok matematikai elmélete szerint az itteni végtelen sok tagú összeadásnak véges összege van: $dq:(q-1)$; ha pl. $q = 2$, ez az összeg $2d$. Zénón érveléséből annyi marad, hogy végtelen sok olyan időpont adható meg, amelyben Akhilleusz *még nem* érte utol a teknőst.)

A következő két aporia szerint a korlátlan oszthatóság föltevésének elejtésével, azaz a tér és az idő atomos szerkezetének föltételezésével is paradoxon keletkezik a mechanikai mozgás leírásakor. (3) *Sztadion:* Ha 3 párhuzamos sor közül az első balra, a harmadik jobbra halad azonos sebességgel, miközben a középső sor mozdulatlan marad, akkor *egyazon idő alatt* a mozgó sorok egymáshoz képest kétszer akkora távolságot tesznek meg, mint a nyugvó sorhoz képest. Ha a távolság is, az idő is atomos szerkezetű, az eltelt idő atomjai mindkét távolság tératomjaira kölcsönösen egyértelmű módon rávetíthetők, s így a két távolság tératomjai is kölcsönösen egyértelmű megfelelésbe hozhatók. Következésképp egy távolság ugyanannyi tératomból áll, mint a kétszer akkora távolság, azaz $1 = 2$. (A modern halmazelmélet szerint két tetszőleges szakasz pontjai között valóban kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető, de a szakaszt nem véges sok pont alkotja.) (4)

A repülő nyíl hegye a mozgás minden pillanatában a tér valamely atomjában tartózkodik; tehát ami mozog, az a mozgás minden időatomja alatt nyugalomban van.

Az aporiák célja föltehetően annak kimutatása volt, hogy a mozgás racionális megragadása lehetetlen. Tanulságuk az, hogy a mozgásjelenségek matematikai leírásában szereplő ideális fogalmak (például a kiterjedés nélküli pont) nem izoláltan, hanem csakis organikus rendszerükben használhatók a valóság egyes mozzanatainak modellálására.

Ugyancsak antik eredetű a *hazug paradoxona,* amely milétoszi *Eubulidésztől* (i. e. 4. sz.) származik. Ennek egy változata szerint a krétai Epimenidész azt mondta egyszer, hogy minden krétai (mindig) hazudik. Ha igazat mondott, akkor hazudott (hiszen ő is krétai), azaz nem mondott igazat. Az ókorban ezt feloldhatatlan ellentmondásnak vélték, noha a föltevésből csak az következik, hogy Epimenidész állítása nem lehet igaz; hamisságának föltételezése viszont nem vezet ellentmondásra. E paradoxon modern variánsa *A. Tarskitól* származik (1933). Tegyük föl, hogy egy táblán a következő felírás olvasható: 'Ami erre a táblára van írva, az nem igaz' (és más nincs a táblán). Jelöljük ezt a mondatot '*A*'-val. Ha *A* tartalma megegyezik a valósággal, akkor a táblán lévő mondat nem igaz (hiszen *A* ezt állítja), de a táblán lévő mondat maga *A;* tehát (1) ha *A* igaz, akkor *A* nem igaz. Ha viszont *A* tartalma nem egyezik meg a valósággal, akkor a táblára írt mondat (azaz *A*) nem igaz, de *A* éppen ezt állítja; tehát (2) ha *A* nem igaz, akkor *A* igaz. (1) és (2) olyan ellentmondás, amelyből – a *kétértékű logika* keretei között – csak egyetlen kiút van: *A* nem állít semmit (olyan kijelentő mondat, amely nem fejez ki *állítást*). Tarski ezzel a paradoxonnal bizonyítja, hogy olyan (ún. *szemantikailag zárt*) nyelvekben, amelyekben a nyelv mondatainak igazságát vagy hamisságát állító mondatok is megfogalmazhatók (a természetes nyelvek ilyenek), lehetetlen az *igaz mondat* fogalmának olyan meghatározása, amely tartalmilag adekvát és a kétértékű logikával összeegyeztethető.

Nevezetes újkori paradoxon a *Russell-paradoxon,* a *G. Cantor* halmazelméletében fölfedezett ellentmondás (1902). Nevezzünk egy halmazt *rendes*nek, ha nem eleme saját magának, és legyen *R* a rendes halmazok osztálya. E definíció szerint egy halmaz akkor és csak akkor eleme *R*-nek, ha nem eleme önmagának. Cantor elmélete szerint *R* is halmaz. Így *R* akkor és csak akkor eleme *R*-nek – azaz önmagának –, ha nem eleme önmagának; de ez önellentmondás. Elkerülése érdekében föl kell adni azt a cantori elvet, hogy minden jól definiált összesség egyben *individuum* is, amely eleme lehet valamely összességnek. E paradoxonnak számos változata (köztük több népszerű fogalmazású is) ismert.

A bemutatott történeti példák azt tanúsítják, hogy a paradoxonok föloldásához fogalomkészletünk kritikai felülvizsgálata, finomítása szükséges.

Logikai hiba

A logikai törvények megsértése az érvelésben vagy a fogalomalkotásban. Szűkebb értelemben vett logikai hiba a téves következtetés és a nem szabatos definiálás (mindkettő gyakran a többértelmű kifejezések váltakozó értelemben való használatából származik). Tágabb értelemben logikai hibának számít az érvelés premisszáinak nem kielégítő megalapozottsága is. Gyakori logikai hiba az ún. *hibás kör (circulus vitiosus),* ami fölléphet mint körben forgó okoskodás, a bizonyítandó állításnak az érvelés során – némileg más fogalmazásban – érvként való fölhasználása, vagy mint hibás *definíció,* amelyben az a kifejezés, amelynek jelentését meg kellene határozni, előfordul a meghatározásban (például: a hányados az osztandó és az osztó hányadosa).

A *hagyományos logikában quaternio terminorum* (lat. 'a terminusok négyszerezése') címmel nyilvántartott logikai hiba úgy jön létre, hogy egy érvényes *kategorikus szillogiz-*

musban a középső terminus a két premisszában különböző jelentéssel szerepel, és így a szillogizmus valójában nem 3, hanem 4 terminust tartalmaz. Példa: „A sárga (egy) szín. Az arany sárga. Tehát az arany (egy) szín." Itt az első premisszában az 'a sárga' elvont individuumterminusként (a színek egyikének tulajdonneveként), a másodikban 'sárga' általános terminusként (egy tulajdonság kifejezőjeként) szerepel, tehát létrejött a terminusok négyszerezése; ezért az idézett következtetés hibás. (Mivel a latinban nincs határozott névelő, a latin nyelvű középkori logikában egy ilyen hibás érvelés nagyon természetesen hangzott.)

Ugyancsak a hagyományos logikában szerepelt a *petitio contrariorum* (lat. 'ellentétekre hivatkozás'): olyan premisszapár fölhasználása az érvelésben, amelynek tagjai nem lehetnek együtt igazak; továbbá a *petitio principii* (lat. 'az alapra hivatkozás'): olyan érvelés, amely (esetleg burkoltan) premisszaként használja azt, amit bizonyítani kíván (tágabb értelemben: olyan érv fölhasználása a bizonyításban, amely maga is bizonyításra szorul).

A köznapi érvelésekben gyakori logikai hiba a 'ha ... akkor' kapcsolatnak 'akkor és csak akkor, ha'-ként való értelmezése (azaz a *kondicionális* önkényes átminősítése *bikondicionálissá*), és ennek alapján "ha A, akkor B"-ből és B-ből (hibásan) következtetni A-ra. (Például „Ha Juli randevúra megy, [előtte] hosszasan szépítkezik. Juli hosszasan szépítkezik; tehát randevúra megy.")

Ellenőrző kérdések

11.1. Mi a különbség az egyedi és az általános fogalmak között? Melyek a predikatív fogalmak? Mi különbözteti meg a tulajdonság- és fajtafogalmakat a relációktól?

11.2. Milyen kapcsolat van a 'szükségszerű' és a 'lehetséges' funktorok között?

11.3. Mit értünk azon, hogy egy fogalom extenzionálisan, illetve intenzionálisan alárendelt egy másiknak? Mikor mondunk két fogalmat extenzionálisan, illetve intenzionálisan ekvivalensnek? Mit értünk azon, hogy két fogalom extenzionálisan, illetve intenzionálisan diszjunkt? És azon, hogy extenzionálisan, illetve potencionálisan keresztező?

11.4. Milyen alkotóelemei vannak egy definíciónak?

11.5. Milyen definíciótípusokat különböztetünk meg?

11.6. Mi a definíció szabatosságának feltétele?

Gyakorló feladatok

11.1. Az alábbi fogalmak közül melyek egyediek, melyek általánosak? Van-e köztük relációs fogalom? [11.1.]

Ember, okosabb, alacsony, a leghíresebb magyar filozófus, öleb, Dezsőék macskája, rombusz, lift, baleset.

11.2. Fejezzük ki a szükségszerűség jele (□) felhasználásával az alábbi mondatok szerkezetét: [11.2.]

a) Lehetséges, hogy Dezső nincs otthon.

b) Lehetetlen, hogy állásod van, de kereseted nincs.

c) Nem lehetetlen, hogy nincs pénzem.

11.3. Az alábbi predikátumok közül keressük ki azokat a párokat, amelyek tagjai között alá- és fölérendeltségi viszony, ekvivalencia, szétválasztottság, illetve kereszteződés áll fenn! Jelezzük, hogy a kapcsolat csupán extenzionális-e, avagy intenzionális! A predikátumokat a szokásos értelmükben vegyük. [11.3.]

Gyermek, nő, ember, élőlény, férfi, bolygó, égitest, teljes korú magyar állampolgár, 18. évét betöltött magyar állampolgár, iskolaigazgató, gimnáziumi igazgató, párhuzamos szárú trapéz, paralelogramma, rombusz, trapéz, téglalap, négyzet.

11.4. Írjuk föl az alábbi definíciók szerkezetét: [11:9,10.]

a) Cselekvőképtelen az a kiskorú személy, aki 12. életévét még nem töltötte be.

b) A fotel hát- és kartámlás, párnázott, egyszemélyes ülőbútor.

c) A munkaerő olyan áru, amely elfogyasztása során új értéket termel.

d) A lift olyan épületgépészeti berendezés, amely rendszeresen nem működik, jelentős gondokat okozva ezzel a felsőbb szinteken lakóknak. (Bárcsak hibás lenne ez a definíció!)

e) Prímszámoknak mondjuk azokat a 0-tól és 1-től különböző természetes számokat, amelyek csak akkor osztói egy szorzatnak, ha valamely tényezőjének is osztói.

11.5. Tekintsük ismertnek a 'nő', 'x gyermeke y-nak' és az 'x házastársa y-nak' predikátumokat, és definiáljuk segítségükkel az alábbi predikátumokat, lehetőleg olyan sorrendben, hogy a már definiáltakat fölhasználhassuk a későbbiek definíciójában. [11:9,10.]

Férfi, x fia y-nak, x lánya y-nak, x apja y-nak, x nagyszülője y-nak, x férje y-nak, x felesége y-nak, x nős, x anyósa y-nak, x unokaöccse y-nak, x nagynénje y-nak.

Feladatmegoldások

Nem minden feladathoz adunk megoldást. A hasonló típusú feladatok közül csak egy-két példát mutatunk be.

1.1. Alkalmas kiegészítő premisszák:

a) Akik édestestvérek, azoknak ugyanaz az anyjuk. Minden tanítónő pedagógus.

b) Minden 3-mal osztható páros szám osztható 6-tal. 10 és 15 között az egyetlen 6-tal osztható szám a 12.

c) Van legalább egy trák harcos.

2.1. Állítások kifejezői *a), b), e), g);* és *i)*. Alkalmas kontextusban állítás kifejezője lehet még *d)* és *h)*. A *c)* és az *f)* példa kérdő, a *j)* pedig felszólító mondat, ezért nem fejezhet ki állítást.

2.2. Azonos információtartalmú *a), b)* és *c),* továbbá a *d), e)* pár tagjai és a *g), h)* pár tagjai.

2.3. Az *a)*-beli tulajdonnevek: *Tigris, Nyuszi, Róbert Gida.* Leírások: *az erdő, Róbert Gida medvéje, annak barátja.* Névmás: *az* (ragozott 'annak' alakban).

A *c)* példában csak leírások szerepelnek: *a nyúl, a róka, a vadász, a most felolvasott mese.*

2.4. A szereplő funktorok (zárójelek között az argumentumok):

c) pulóvere (Márta), *piros* (Márta pulóvere).

e) a legokosabb (Klotild), *okosabb, mint* (Béla, Klotild);

vagy (Klotild a legokosabb, Béla okosabb, mint Klotild).

g) megjön (Ádám); *elmegy* (Éva); *ha* (Ádám megjön, Éva elmegy).

i) fiatal (nagymama, Mária).

2.5. A 2.4.-ben felsorolt funktorok közül inhomogén a 'fiatal', a többi homogén. Névfunktor a 'pulóvere', mondatfunktorok a 'vagy' és a 'ha', predikátumok: *piros; a legokosabb; okosabb, mint; megjön; elmegy.*

3.3. *a)* és *e)* intenziója azonos.

3.6. Intenzionális funktorok: *keres; tudja, hogy; azt álmodta, hogy; azt gondolta, hogy; azt állítja, hogy; lehetséges, hogy.*

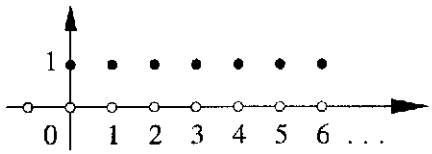
3.8. Igen: csakis hamis lehet.

4.1. Kétargumentumú predikátumok: '... barátja ...-nak', '... okosabb, mint ...', '... ismertebb, mint ...', '... nem más, mint ...'

4.2. A 13. ábra mutatja a megoldást az *a), e), f), g)* esetekre. A predikátum

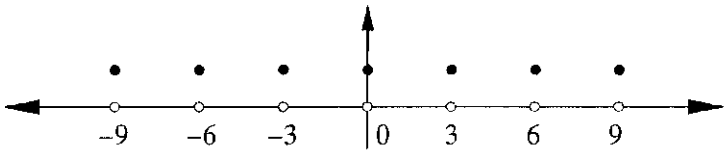
terjedelmét az abszcisszatengelyen levő lyukak (vastagítatlan részek) ábrázolják.

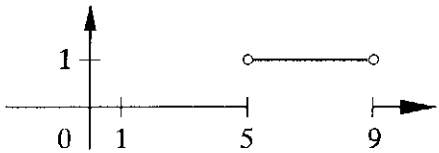
13. ábra



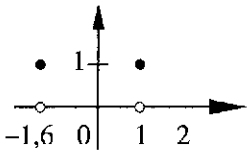
a)

e)





f)



g)

4.3. *a)* A példák között nincs ilyen. (De ha korlátozzuk a megengedett argumentumok körét – azaz a tárgyalási univerzumot –, akkor van.)

c) '... testvére ...-nak', '... párhuzamos ...-val', '... merőleges ...-ra', '... házastársa ...-nak', '... évfolyamtársa ...-nak'.

4.4. Az első esetre példa '... nem más, mint ...', a másodikra '... olyan idős, mint ...'.

5.1. *e)* ~ (Péter hazament) vagy ~ (Péter otthon maradt), de ~ (Péter otthon van).

f) ~[(ha ~ (Éva szőke), akkor ~ (Juli volt az, akit ~ (utolértem))].

5.2. *a)* (Éva szőke) & ~ (Éva tetszik nekem) & (a szőkéket kedvelem).

d) ha (hazajössz & bevásárolsz), akkor (~ (le kell mennem) & megfőzhetem az ebédet).

5.4. *b)* (Juli elmegy & Éva itt marad) ∨ (Juli elmegy & Éva elmegy & ~ (Juli visszajön) & [Éva visszajön ∨ ~ (Éva visszajön)])

c) Ha [~ (esik az eső) & (süt a Nap ∨ ~ (fúj a szél))], akkor [elindulunk & szerencsésen megérkezünk] ∨ (megváltozik az idő & (tábort verünk valahol ∨ visszafordulunk)).

5.5. *b)* ~ [~ (Juli elmegy & Éva itt marad) & ~ (Juli elmegy & Éva elmegy & ~ (Juli visszajön) & ~ (~ (Éva visszajön) & Éva visszajön))].

c) ~ (~ (Ha [~ (esik az eső) & ~ (~(süt a Nap) & fúj a szél)], akkor [elindulunk & szerencsésen megérkezünk]) & ~ (megváltozik az idő & ~ (~ (tábort verünk valahol) & ~ (visszafordulunk)))].

5.7. *a)* (ismerem a szabályt & tudom alkalmazni a szabályt) ⊃ (~ (hibát vétek) ⊃ jó eredményt kapok).

5.10. *b) p:* esik az eső; *q:* süt a Nap; ~ $(p \& q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$.

d) p: szülői felügyelet alatt nem áll a kiskorú; *q:* intézeti gyámság alatt áll a kiskorú; *r:* a gyámhatóság gyámot rendel a kiskorú részére; $(p \& \sim q) \supset r$

5.12. Nincs.

5.13. *a)* (Frédi elrejtette a zsákmányt) & (Vilma aludt) & (Béni átöltözött) & (Béni eltüntette a nyomokat).

d) (Andor elvette Bandi húgát) & (Andor sógora Céliának) & (Célia férje most Dezső főnöke).

5.14. *c)* [Elmegyek & ~(visszajövök)] ∨ [(újrakezdem az egészet) & elmegyek]. Negációja, a De Morgan-törvények alkalmazásával, így alakítható át: (~ (elmegyek) ∨ visszajövök) & (~ (újrakezdem az egészet) ∨ ~ (elmegyek)).

5.15. *c)* Legyen *p:* várakozás nélkül kapok reggelit; *q:* elalszom; *r:* nyolc órára megérkezem. Ekkor az állítás logikai szerkezetét a '$p \supset (\sim q \supset r)$' formula, vagy a vele logikailag ekvivalens $(p \& \sim q) \supset r$ fejezi ki.

i) és *j)* A paraméterek megválasztása: p_1: a szemtanú megbízható; p_2: az írásszakértő véleménye helytálló; *q:* a bűncselekményt előre megfontolt szándékkal követték el; r_1: a talált ujjlenyomatok a tettestől származnak; r_2: a talált ujjlenyomatok a tettes bűntársától származnak. Ekkor *i)* szerkezete:

$$(p_1 \& p_2) \supset (q \equiv (r_1 \vee r_2)),$$

és *j)* szerkezete:

$$(p_1 \& p_2 \& r_1) \supset q.$$

6.1. *a)* Mindegyik kiírt névmás szabad előfordulású, de a 'maradjon' ki nem mondott névmása a 'neki'-re utal vissza.

b) Az 'amely' az 'a kutya' leírásra utal vissza. Az 'őt' kétértelmű: lehet szabad előfordulású is, de az is lehet, hogy az 'a sintér' leírásra utal vissza (ez a valószínűbb).

c) Az 'őket' a 'halai'-ra utal vissza (kevésbé valószínű: szabad). Az 'eteti' ki nem mondott névmása az 'akinek'-beli 'aki'-re utal vissza.

6.2. *c)* x farkát y találta meg z ajtajánál.

6.4. *c)* $\exists x$ [Júlia szereti x-et). *d)* $\exists x$ [x szereti Júliát].

6.5. *a)* $\forall y$ [x okosabb, mint y]. *c)* $\exists x$ [z látja x-et) & $\forall x$ [y látja x-et].

7.1. *a)* $\sim \forall x$ [x fénylik $\supset x$ arany) (vagy: $\exists x$ [x fénylik & $\sim$ (x arany)]).

e) $\exists x$ [x ember & x türelmetlen] & $\sim \forall x$ [x ember $\supset x$ türelmetlen].

7.2. *b)* $\exists x$ [Edömér találkozott x-szel & x páciense Edömérnek & $\exists y$ (y szomszédja Edömérnek & Edömér összetévesztette x-et y-nal)].

c) $\exists x$ [x műszaki & x behatolt az övezetbe & $\forall y$ (y kísérte x-et $\supset y$ műszaki)].

7 .4. *f)* $\forall x$ [x kedveli a szabatosságot $\supset \sim$ (x bukik logikából)] $\Leftrightarrow \sim \exists x$ [x kedveli a szabatosságot & x bukik logikából).

n) $\forall x$[(x pályázó & $\sim$ (x megfelelt)) $\supset x$ kiskorú] $\Leftrightarrow$
$\sim \exists x$ [x pályázó & $\sim$ (x megfelelt) & $\sim$ (x kiskorú)].

8.1. *b*) a kapus = a legjobb tizenegyesrugó.

c) Juli barátja = az igazgató helyettese.

8.2. *e)* $\forall x \forall y$ [(x filozófus & y filozófus & $x \neq y$) $\supset x$ nem ért egyet y-nal].

8.3. *a)* Semmi sem azonos mindennel. *b)* Van legalább két dolog. *c)* Minden dolog különbözik valamitől.

8.4. $\forall x$ [feleségül megyek x-hez $\supset$ (x = Dezső)]. A másik mondat: $\sim \exists x$ [feleségül megyek x-hez]. Ha az utóbbi igaz, akkor a 'feleségül megyek x-hez' predikátum terjedelme üres, és így az előbbi általánosított kondicionális triviálisan igaz. (Lásd 7.2-ben.) A két állítás között tehát nincs ellentmondás.

9.1. Tegyük föl, hogy $\mathbf{P} \cup \{\sim B\}$ kielégíthető, azaz van olyan interpretáció – nevezzük I-nek –, amely $\mathbf{P}$ minden elemét 1-re (igazra), B-t pedig 0-ra (hamisra) interpretálja. Mivel $\mathbf{P} \Rightarrow A$, azért $\mathbf{P} \cup \{\sim A\}$ kielégíthetetlen, tehát I hamisra értékeli "$\sim A$"-t, azaz igazra értékeli A-t. Mivel $A \Rightarrow B$, azért $\{A, \sim B)$ is kielégíthetetlen; tehát I, amely igazra értékeli A-t, kénytelen igazra értékelni B-t is. De ez ellentmond annak, hogy I hamisra értékeli B-t; ez pedig abból a kiinduló föltevésből adódott, hogy $\mathbf{P} \cup \{\sim B\}$ kielégíthető. A föltevésből nyert logikai ellentmondás megcáfolta a föltevést, így $\mathbf{P} \cup \{\sim B\}$ kielégíthetetlen, azaz, definíció szerint, $\mathbf{P} \Rightarrow B$.

10.1. Mind a négy formula analitikus táblázata zárt, ami azt igazolja, hogy ezek kielégíthetetlen formulák (negációjuk logikai igazság). Példaként bemutatjuk *b)* analitikus táblázatát.

9. táblázat

1.	$(p \supset (q \supset r)) \,\&\, (p \supset q) \,\&\, p \,\&\, \sim r$			
2.	$p \supset (q \supset r)$ [1]			
3.	$p \supset q$ [1]			
4.	p [1]			
5.	$\sim r$ [1]			
6.	$\sim p$ [3]	q [3]		
7.	*	$\sim p$ [2]	$q \supset r$ [2]	
8.	(4,6)	*	$\sim q$ [7]	r [7]
		(4,7)	*	*
			(6,8)	(5,8)
	1. ág	2. ág	3. ág	4. ág

10.2. A bizonyítást úgy végezzük, hogy elkészítjük az adott formula *negációjának* analitikus táblázatát. Ennek zártnak kell lennie (mindhárom formula esetén).

10.3. Lásd 5.15. megoldását. Az ottani paraméterezést fölhasználva, *b)* szerkezete: '$r \supset p$', *c)* szerkezete: '$p \supset (\sim q \supset r)$', *d)* szerkezete: '$q \supset \sim p$', és *e)* szerkezete: '$\sim q \supset (p \,\&\, r)$. Analitikus táblázattal ellenőrizzük, hogy a *b), c), d)* premisszákból következik-e az *e)* formula *(10. táblázat)*. A táblázat 1. és 2. ága nyitott, tehát a következtetés hibás. (A táblázatot csak addig folytattuk, amíg nyitott befejezett ágat nem találtunk.)

10. táblázat

1.					$r \supset p$	$Pr + \sim K$ (1–4. sor)
2.					$p \supset (\sim q \supset r)$	
3.					$q \supset \sim p$	
4.					$\sim (\sim q \supset (p \,\&\, r))$	
5.					$\sim q$ [4]	
6.					$\sim (p \,\&\, r)$ [4]	
7.				$\sim r$ [1]		p [1]
8.			$\sim p$ [2]	$\sim q \supset r$ [2]		...
9.		$\sim q$ [3]	$\sim p$ [3]	...		
10.	$\sim p$ [4]	$\sim r$ [4]	...			
	1. ág	2. ág	3. ág	4. ág		5. ág

Nem fontos tovább készíteni az analitikus táblát, mert van befejezett nyitott ága, tehát a következtetés nem helyes.

10.4. Igen.

10.5. *i)*-ből következik *j)*, de fordítva nem.

10.6. Vezessük be a következő paramétereket: p_1: a kapcsolót benyomjuk; p_2:

a 'Rajt' gombot megnyomjuk; q_1: a védőellenállás lekapcsolódik; q_2: a készülék feszültség alá kerül; r: a felvétel elindul. E paraméterekkel *a)* szerkezete: '$p_1 \supset (q_1 \& q_2)$', *b)* szerkezete: '$(p_2 \& q_2) \supset r$'. Készítsük el *a), b)*, p_1 és p_2 közös analitikus táblázatát *(11. táblázat)*. A táblázatnak egyetlen nyitott ága van, s ez mutatja, hogy a föltevések mellett mind az öt mondat igaz (egyebek között r is, tehát a felvétel elindul).

11. táblázat

1.	$p_1 \supset (q_1 \& q_2)$				
2.	$(p_2 \& q_2) \supset r$				
3.	p_1				
4.	p_2				
5.	$\sim p_1$ [1]			$q_1 \& q_2$ [1]	
6.	*			q_1 [5]	
7.	(3,5)			q_2 [5]	
8.		$\sim (p_2 \& q_2)$ [2]			r [2]
9.		$\sim p_2$ [8]	$\sim q_2$ [8]		
		*	*		
		(4,9)	(7,9)		
	1. ág	2. ág	3. ág		4. ág

10.7. Helyes.
10.8. Helyes.
10.9. Ez a következtetés is helyes.

10.14. A premisszákat így formalizálhatjuk:

1. $\sim \exists(N \& B)$, 2. $\forall(K \vee V)$, 3. $\forall(K \supset F)$,
4. $\forall(V \supset E)$, 5. $\forall(F \supset B)$.

[Szótár: *N:* nő, *B:* blokkot kapott, *K:* klubtag, *V:* vendég, *F:* fizetett, *E:* ebédelt.]

A konklúzió: $\forall(N \supset E)$. A premisszákat átírhatjuk így:

1. $\forall(N \supset \sim B)$, 2. $\forall(\sim K \supset V)$, 3. $\forall(\sim F \supset \sim K)$,
4. $\forall(V \supset E)$, 5. $\forall(\sim B \supset \sim F)$.

Innen már leolvasható az N-től E-hez vezető lánc

$$\underset{1}{N} - \underset{5}{\sim B} - \underset{3}{\sim F} - \underset{2}{\sim K} - \underset{4}{V} - E.$$

Ez igazolja a következtetés helyességét.

10.15. *b)* nem helyes, a többi helyes.
10.16. *a)* helyes, *b)* és *c)* hibás.
10.21. A premisszák formalizálása:

$$\forall(O \supset \sim K), \qquad \sim \exists(L \,\&\, B), \qquad \forall(\sim K \supset L).$$

[Szótár: *O:* óvodás, *K:* következetes, *L:* olyan, akit lebecsülnek, *B:* bánni tud krokodillal.]

Az 1. és a 3. premisszából láncszabállyal kapjuk ezt:

$$\forall(O \supset L).$$

A 2. premissza átalakítható így:

$$\forall(L \supset \sim B).$$

E kettőből ismét a kvantifikációs láncszabállyal '$\forall(O \supset \sim B)$' következik, ami éppen a konklúzió.

11.1. Egyedi fogalom: 'a leghíresebb magyar filozófus' és 'Dezsőék macskája', a többi általános. Relációs fogalom: 'okosabb'.
11.2. *a)* $\sim \Box$ (Dezső otthon van).
b) $\Box \sim$ (állásod van & $\sim$ (kereseted van)).
c) $\sim \Box$ (van pénzem).
11.3. (Részleges válasz.) Csak extenzionálisan ekvivalensek: 18. évét betöltött magyar állampolgár – teljes korú magyar állampolgár. Intenzionálisan ekvivalensek: párhuzamos szárú trapéz – paralelogramma.
11.4. *b)* x fotel $\equiv_{df}$ (x ülőbútor & x egyszemélyes & x háttámlás & x kartámlás & x párnázott).
e) x prímszám $\equiv_{df}$ (x természetes szám & $x \neq 0$ & $x \neq 1$ &
$\forall y \forall z[x \mid y.z \supset (x \mid y \vee x \mid z)]$).
(Itt '$x \mid y$' az 'x osztója y -nak' predikátumot szimbolizálja.)
11.5. Tárgyalási univerzumnak az emberek halmazát tekintsük. Néhány megoldás: x férfi $=_{df} \sim$ (x nő); x lánya y-nak $=_{df}$ (x gyermeke y-nak & x nő);
x apja y-nak $\equiv_{df}$ (y gyermeke x-nek & x férfi);
x anyósa y-nak $\equiv_{df}$ (x nő & $\exists z$ [y házastársa z-nek & z gyermeke x-nek]); x nagynénje y-nak $\equiv_{df}$ (x nő & $\exists z$ [y gyermeke z-nek & $\exists u$ (x gyermeke u-nak & z gyermeke u-nak)]). [Itt '$\exists u$ (x gyermeke u-nak & z gyermeke u-nak)' azt fejezi ki, hogy x és z testvérek (legalább féltestvérek).]

Kislexikon

A kislexikon alkalmas lehet a tanult fogalmak felidézésére. Minden szócikk végén, szögletes zárójelek között látható a tankönyv azon szakaszának (szakaszainak) száma, ahol a téma részletes kifejtése megtalálható. Ha a szócikk nem nyújt elég felvilágosítást, lapozzon vissza az eredeti forráshoz. A kislexikon nem magyaráz, csak rövid ismertetést ad. Tárgymutatóként is használható.

A '§'-jel címszóismétlést jelent. Ha a szövegben egy szó előtt nyíl (→) látható, az a szó is szerepel – címszóként – a kislexikonban.

adjunkció: az → *alternáció* más elnevezése. [5.8.]

alá- és fölérendeltség: → *fogalom.*

alapkategóriák: a → *logikai grammatikában a kijelentő mondatok* és az *individuumnevek* kategóriája. Rövid elnevezésük: a *mondat,* illetve *a név* kategóriája. [2.3.]

állítás: valamely egyértelmű(sített) kijelentő mondat információtartalma, konkrét → *intenziója.* Jellemzője, hogy egyértelműen vagy igaz, vagy hamis. [2.1.]

általános fogalom: valamely → *funktor* intenziója. (→ *fogalom.*) [3.3.; 11.1.]

általánosított kondicionális: → *univerzális állítás.*

alternáció: kétargumentumú → *igazságfunktor,* jele: V. Két mondat §-ja akkor és csak akkor hamis, ha mindkét tagmondat hamis. A megengedő értelmű 'vagy' kötőszó – amely nem zárja ki a két tagmondat együttes igazságát – logikai megfelelője. Az § → *kommutatív és* → *asszociatív* funktor, ezért kettőnél több argumentumra is kiterjeszthető. [5.5.]

analitikus táblázat: formulahalmaz → *kielégíthetőségének* vizsgálatára szolgáló eljárás, egyben a → *következtetés* helyességének ellenőrzésére is használható. Korlátlanul és effektíve alkalmazható a kvantormentes formulák, továbbá az → *egyrétű* kvantoros formulák körében. [10:1,2.]

antiszimmetrikus reláció: → *reláció.*

argumentum: valamely → *funktor* üres helyére – *argumentumhelyére* – kerülő kifejezés, amelyet e minőségben a funktor §-ának vagy *bemenetének* mondunk. Ha a funktor → *szemantikai értéke* egy függvény, a funktor §-ának szemantikai értékét a függvény §-értékének, gyakran röviden a függvény §-ának mondjuk. [3.4.]

argumentumszám: valamely → *funktor* kitöltésre váró helyeinek – *argumentumhelyeinek* – száma. [2:4,5.]

Arisztotelész (i. e. 384–322): ókori görög filozófus, a logika tudományának megalapozója. [2.1.]

aszimmetrikus reláció: → *reláció.*

asszociativitás: némely kétargumentumú név- vagy mondatfunktor azon tulajdonsága, hogy "$(a * b) * c$" és "$a * (b * c)$" *faktuális értéke* mindig azonos; itt '*' a funktor jele; a, b és c pedig az argumentumai. Az aritmetikai funktorok közül asszociatív az összeadás és a szorzás, az → *igazságfunktorok* közül pedig a konjunkció, az alternáció és a bikondicionális. [5.4.]

azonossági állítás: → *azonosságpredikátum.*

azonosságpredikátum: kétargumentumú → *predikátum,* jele '=', a → *logikai funktorok* közé soroljuk. Terjedelmébe azon individuumpárok tartoznak, amelyek két tagja azonos. Az § kitöltésével nyert *azonossági állítás* – szerkezete: "$a = b$" – akkor és csak akkor igaz, ha a benne szereplő két név (a és b) egyazon dolgot jelöli (jelöletük egyetlen tárgy). Így triviálisan igaz bármely "$a = a$" szerkezetű állítás (az *önazonosság törvénye),* valamint '$\forall x(x = x)$' is. → *Extenzionális predikátum* argumentumhelyén az azonosak fölcserélhetők egymással: "$a = b$" és $F(a)$ következménye $F(b)$ *(Leibniz törvénye).* [8:1,2.]

bikondicionális: egy → *kondicionálisból* és megfordításából képezett → *konjunkció,* azaz "$(p \supset q)$ & $(q \supset p)$" szerkezetű mondat, melyet "$p \equiv q$"-val rövidítünk. A § akkor és csak akkor igaz, ha két argumentumának igazságértéke azonos. Köznyelvi kifejezési formája: 'akkor és csak akkor, ha'. [5.7.]

dedukciótétel: a → *következményreláció* egyik törvénye. Azt mondja ki, hogy egy **P** premisszahalmazból akkor és csak akkor következik egy "$A \supset B$" kondicionális, ha **P**-t kibővítve A-val, a bővített premisszahalmazból következik B. Speciális esete (üres **P**-vel): $A \Rightarrow B$ akkor, és csak akkor áll fenn, ha $\Rightarrow A \supset B$. [9.3.]

definíció (meghatározás): egy név vagy egy → *funktor* → *intenziójának* kifejtése más, ismert jelentésűnek föltételezett szavak segítségével. Alkatrészei: a meghatározandó kifejezés (a *definiendum*), a meghatározó kifejezés (a *definiens*), és a kötőelem, amely jelzi, hogy a meghatározandó intenziója azonos a meghatározóével. Funktorok definiálásakor argumentumhelyeiket kitöltjük változókkal; ekkor a formai szabatosság feltétele az, hogy a definiendumban és a definiensben ugyanazon változók forduljanak elő szabadon, és a definiendum ne szerepeljen alkatrészként a definiensben (a körben forgás tilalma). A kötőelem, predikátum §-ja esetén a bikondicionális, név és névfunktor §-ja esetén az azonosság jele lehet, ellátva a §-ra utaló indexszel ($\equiv_{df}$, illetve $=_{df}$) [11.4.]

definiendum: → *definíció.*

definiens: → *definíció.*

De Morgan-törvények: → *konjunkció* → *negációja* → *logikailag ekvivalens* a tagok negáltjaiból képezett → *alternációval;* alternáció negációja logikailag ekvivalens a tagok negáltjainak konjunkciójával; lásd (T9) és (T10). A → *kvantifikációs* §: → *univerzális kvantifikáció* negációja logikailag ekvivalens a negált hatókör → *egzisztenciális kvantifikációjával;* egzisztenciális kvantifikáció negációja pedig a negált hatókör univerzális kvantifikációjával; lásd (T34:1,2). [5.5.; 6.3.]

deskripció: → *leírás.*
diszjunkció: az → *alternáció* más elnevezése. [5.8.]
diszjunkt fogalmak: → *fogalom.*

egyedi fogalom: valamely → *leírás* intenziója. [3.2; 11.1.]
egyrétű formulák: egyargumentumú → *predikátumparaméterek* egyazon x → *változóval* kitöltve, továbbá ilyen formulákból → *igazságfunktorok* alkalmazásával képezett formulák, valamint ezek → *kvantifikálása* vagy változójuk → *névparaméterrel* való helyettesítése révén nyert formulák. Az § körében a → *kielégíthetőség* (és a → *következményreláció*) mechanikus eljárással ellenőrizhető és eldönthető. [10.3.]
egzisztenciaállítás: egzisztenciális → *kvantorral* kezdődő, azaz "$\exists x A$" szerkezetű állítás. Gyakori alakja: "$\exists x[F(x) \& G(x)]$" ("van olyan F, amely G"). [7.1.]
egzisztenciális kvantor: → *kvantor.*
ekvivalencia: → *logikai ekvivalencia és* → *ekvivalenciareláció.*
ekvivalenciareláció: olyan kétargumentumú → *reláció,* amely (adott halmazon mint → *tárgyalási univerzumon) reflexív, szimmetrikus* és *tranzitív.* A tárgyalási univerzumot széttagolja páronként közös elem nélküli részekre *(→ felosztás).* [8.5.]
ekvivalens fogalmak: *fogalom.*
eldöntési eljárás: mechanikus módszer (algoritmus) egy → formulahalmaz → *kielégíthetőségének* s ezzel együtt a → *következményreláció* fennállásának vizsgálatára, eldöntésére. A kvantormentes, valamint az → *egyrétű* formulák körében § az analitikus táblázat módszere. Egyrétű formulák körében a Venn-diagramok módszere is §. A *klasszikus elsőrendű logika* egészéhez nincs (valószínűleg nem is lehetséges) univerzális §. [10.2.]
ellentmondás elve: Arisztotelésztől származó logikai alapelv, amely szerint egy állítás nem lehet egyszerre igaz is és hamis is. [2.1.]
előtag: a → *feltételes állításnak* a 'ha' kötőszó utáni tagmondata, azaz a feltétel, továbbá a → *kondicionális* első argumentuma. [5.6.]
előtag indirekt cáfolása: következtetés egy → *kondicionálisból* és utótagja negációjából előtagjának negációjára; lásd (T16). [5.6.]
értékelés: 1. a kijelentő mondatokban szereplő szabad névmások és időjelek értékeinek megadása. – 2. → *Változót* tartalmazó kifejezésben a szabad változók értékeinek meghatározása (rendszerint egy rögzített → *tárgyalási univerzumra* korlátozva). [3.1.; 6.3.; 9.1.]
értékrés: → *szemantikai értékrés.*
érvényesség: → *logikai igazság.*
explicit információ: az információt hordozó kijelentő mondat információtartalmának az a része, amely *közvetlenül,* lényegében a mondat megértésével felfogható. Egy vagy több mondatból → *következtetés* révén további *rejtett* információk is előhívhatók; ezek, közvetlenné tételük előtt, *implicit* információknak mondhatók. Az implicit és az § között azonban nem húzható éles határvonal. [1.2.]

extenzionális funktor: olyan → *funktor,* melyben a *bemenetek* → *faktuális értékei* egyértelműen meghatározzák a kimenet faktuális értékét. [3.3.]

extenzionális logika: a logika azon fejezete, amely a → *logikai szerkezet* feltárásakor (és a logikai törvények kutatásakor) csak az → *extenzionális funktorokat* veszi figyelembe (felbontatlanul hagyva az → *intenzionális funktorok* és argumentumaik alkotta kifejezéseket). Speciális részterülete a → *klasszikus elsőrendű logika.* [3.4.]

faktuális érték: a → *szemantikai értékek* egyik fajtája. Egy állítást kifejező mondat §-én a mondat → *igazságértékét* értjük. Név §-e a név → *jelölete* (a név jelölte individuális tárgy, ha van ilyen). → *Extenzionális funktor* §-e az a szabály, amely bemeneteinek §-éből kiszámítja kimenete §-ét. (Egy ilyen szabály ténylegesen egy függvény.) → *Intenzionális funktoroknak* nincs §-ük, csak → *intenziójuk.* Ha egy kifejezésnek van intenziója is, §-e is, akkor §-ét meghatározza intenziója és a világ állapota (a tények). [3:1,2,3.]

felosztás: egy halmaz elemeinek páronként közös elem nélküli részekre tagolása (partíció). Ha a halmaz egy egyargumentumú → *predikátum terjedelme,* akkor a széttagolást a predikátum intenzióját alkotó → *általános fogalom* §-ának tekinthetjük. §-t valamely → *ekvivalenciareláció* segítségével létesíthetünk. [8.5.]

feltételes állítás: "ha *p,* (akkor) *q*" szerkezetű állítás, melyben *p* és *q* kijelentő mondatok, *p az előtag, q az utótag.* A § biztosan hamis, ha előtagja igaz, ám utótagja hamis. Ezért valamennyi § minimális tartalma annak *tagadása,* hogy előtagja igaz és utótagja hamis. Ezt fejezi ki a → *kondicionális* elnevezésű igazságfunktor. [5.6.]

fogalom: egy *individuumleírás* vagy egy → *funktor* → *intenziója,* az előbbiek az *egyedi,* az utóbbiak az *általános* §-ak. → *Névfunktor* intenziója *műveleti,* → *predikátum* intenziója *predikatív* §. A többargumentumú predikátumok intenzióját *relációknak* (relációs §-knak) nevezzük. Predikatív § *terjedelmén* a §-at kifejező predikátum terjedelmét értjük. Egy predikatív § *alárendelt* egy másiknak – és a másik *fölérendelt* az elsőnek –, ha az első terjedelme *szükségszerűen* része a másik terjedelmének. Kölcsönös alárendeltség esetén a fogalmakat *ekvivalenseknek* mondjuk. Ha terjedelmük közös része *szükségszerűen* üres, a fogalmakat *diszjunktaknak* (szétválasztottaknak) minősítjük. Két predikatív § *potenciálisan keresztező,* ha egyikük sem alárendeltje a másiknak, és nem is diszjunktak. [11.3.]

formalizálás: természetes nyelven kifejezett kijelentő mondatból → *formula* képzése. Első lépésként a mondat → *logikai szerkezetét* tárjuk föl kisebb vagy nagyobb mély*ségig (→ strukturált mondat),* majd a felbontatlanul hagyott alkatrészeket megfelelő típusú → *paraméterekkel* helyettesítjük. A § fontos segédeszköz a → *következtetés* helyességének vizsgálatához. [9.1.]

formula: olyan, nem természetes nyelvi kifejezés, melyben kizárólag → *paraméterek,* → *logikai jelek* és zárójelek szerepelnek, és amelyből a paraméterek szabatos behelyettesítése (s a logikai jeleknek a megfelelő → *logikai szavakkal* való pótlása révén) kijelentő mondat keletkezik. A §-kat előnyösen használhat-

juk a → *logikai törvények* megfogalmazására, továbbá a → *következtetések* helyességének vizsgálata során. [5.3.; 9.1.]

Frege, Gottlob (1848–1925): német matematikus és logikus, a modern szimbolikus logika megteremtője.

funktor: a → *logikai grammatikában* minden olyan értelmes kifejezés, amely se nem mondat, se nem név. A §-ok alkatrészként előfordulhatnak összetett nevekben és mondatokban. §-ok segítségével nevekből, mondatokból és §-okból összetett neveket és mondatokat alkothatunk. Egy § egy vagy több, kitöltésre váró üres helyet tartalmaz, ezek a § *argumentumhelyei.* Az argumentumhelyeket előírt kategóriájú kifejezésekkel kitöltve, a §-ból mondat vagy név keletkezik. Az argumentumhelyekre kerülő kifejezések a § *argumentumai* vagy *bemenetei,* a kitöltéssel nyert eredmény pedig a § *kimenete.* Egy § grammatikai kategóriáját egyértelműen meghatározza bemeneteinek és kimenetének kategóriája. [2:4,5.]

hiányos következtetés: → *következtetés.*

homogén funktor: olyan többargumentumú → *funktor,* melynek minden bemenete egyazon kategóriájú kifejezéssel töltendő ki. Legegyszerűbb típusai a → *mondatfunktorok,* a → *névfunktorok* és a → *predikátumok.* [2:4,5.]

igazságértékek: az igazság és a hamisság. Minden állításnak rendelkeznie kell e két igazságérték valamelyikével, de csak egyikével. Ha egy kijelentő mondat *állítást* fejez ki, a mondatot is igaznak, illetve hamisnak mondjuk aszerint, hogy a mondat kifejezte állítás igaz, illetve hamis. Az § jelölésére a logikában a 0 és az 1 számjeleket is használjuk: a 0 a 'hamis', az 1 az 'igaz' szimbóluma. [2.1.]

igazságfunktor: extenzionális → *mondatfunktor,* egy vagy több mondatból összetett mondatot formáló → *logikai funktor.* Egy § alkalmazásaként kapott összetett mondat → *igazságértékét* egyértelműen meghatározza a tagmondat(ok) – az § argumentumai – igazságértéke. – Alapvető egyargumentumú § a → *negáció,* jele: ~. A kétargumentumú §-ok közül a leggyakrabban használtak a → *konjunkció,* az → *alternáció,* a → *kondicionális* és a → *bikondicionális* (jelük rendre: &, ∨, ⊃, ≡). Az említett §-ok kombinált alkalmazásaival bármely más § kényelmesen kifejezhető. [5. fejezet.]

igazságfüggvény: olyan, egy- vagy többargumentumú függvény, melynek argumentumértékei is, függvényértékei is → *igazságértékek* (többnyire a 0 és az 1 számjelekkel ábrázolva). Egy → *igazságfunktor* → *faktuális értéke* mindig valamely §. Az §-ek megadására értéktáblázatokat használnak.

implicit információ: → *explicit információ.*

implikáció: 1. a → *kondicionális* más elnevezése. 2. → *Következtetés.* "*A* implikálja *B*-t" annyi mint "*A*-nak következménye *B*".

individuális fogalom: individuumleírás (deskripció) → *intenziója.* [3.2.; 11.1.]

individuumnév: egyedi dolog (akár konkrét fizikai tárgy vagy személy, akár elvont objektum) neve. Az § lehet *tulajdonnév* vagy *leírás* (deskripció). Néha bizonyos *névmásokat* használunk §-ek helyett; a logikai grammatika szerint ezek is

az § kategóriájába tartoznak, csakúgy, mint a műnévmások, az individuumváltozók *(→ változók)* is. [2.2.; 6.1.]

inhomogén funktor: olyan többargumentumú *funktor,* melynek különböző argumentumhelyeit nem mind azonos kategóriába tartozó kifejezésekkel kell kitölteni. [2:4,5.]

intenzió: a → *szemantikai értékek* egyik fajtája, a logikai értelemben vett *jelentés* (amely eltekint a jelentés érzelmi, hangulati és stiláris mozzanataitól). Egy állítást kifejező mondat §-ján azon feltételek összességét értjük, amelyek mellett a mondat igaz állítást fejez ki. Egy név §-ja a név → *jelöletét* meghatározó feltételek összessége. (A tulajdonneveknek általában nincs §-juk.) Egy funktor §-ja az a szabály, amely bemeneteinek §-jából „kiszámítja" kimenetének §-ját. [3:1,2,3.]

intenzionális funktor: olyan → *funktor,* amelyben a kimenet → *faktuális értékét* nem határozza meg egyértelműen a bemenetek faktuális értéke, hanem ez függ némely bemenet → *intenziójától* is. [3.3.]

interpretáció: 1. a köznyelv homályos vagy többértelmű kifejezéseinek pontosítása, egyértelműsítése abból a célból, hogy valamely kijelentő mondat egyértelmű információhordozó, azaz → *állítás* kifejezőjévé váljék, és határozott → *igazságértéke* legyen. – 2. → *Formulák* §-ja a → *klasszikus elsőrendű logikában:* a bennük szereplő → *paraméterek* → *faktuális értékének* rögzítése egy *U* → *tárgyalási univerzumra* korlátozva. Részletezve: *n*-argumentumú predikátumparaméter faktuális értéke az *U* elemeiből képezhető → *n-tagú sorozatok* halmazának valamely részhalmaza lehet, névparaméter faktuális értéke *U* valamely eleme, mondatparaméter faktuális értéke pedig a két → *igazságérték* valamelyike lehet. Az § révén igazságértéket kap minden olyan formula, amely a faktuális értéket nyert paraméterekből felépíthető. [3:1,2,4.; 9.1.]

irreflexív reláció: → *reláció.*

jelölet: valamely név → *faktuális értéke,* az az individuális dolog, amelyet a név jelöl, megnevez (ha van ilyen tárgy). [3.2.]

kategorikus állítások: a "Minden, ami *F,* az *G*", "Egyetlen *F* sem *G*", "Van olyan *F,* amely *G*", "Van olyan *F,* amely nem *G*" szerkezetű állítások középkori eredetű elnevezése. [7.3.]

kategorikus szillogizmusok: a → *kategorikus állítások* körébe tartozó egyszerű következtetések, amelyeket Arisztotelész foglalt rendszerbe.

kielégíthetetlenség: → *kielégíthetőség.*

kielégíthetőség: egy → *formula*halmazt *kielégíthetőnek* mondunk, ha van olyan → *interpretáció,* amely a halmaz minden elemét együttesen igazzá teszi. Ha nincs ilyen interpretáció, a formulahalmazt *kielégíthetetlennek* mondjuk. A kielégíthetetlenség a → *logikai ellentmondás* megnyilvánulása. [9.2.]

kizáró értelmű 'vagy': a 'vagy' kötőszó olyan értelmű használata két mondat összekapcsolására, amely szerint a két tagmondat egyike igaz, másika hamis (*vagy* az egyik, *vagy* a másik, de nem mindkettő). Ezt fejezi ki a '∇' *igazságfunktor,* amely a → *bikondicionális* negációja. [5.7.]

kizárt harmadik elve: klasszikus logikai alapelv, amely szerint bármely állítás vagy igaz, vagy hamis, harmadik lehetőség nincs. Az → *ellentmondás elvével* együtt a logika *kétértékűségének* eszméjét fejezi ki. [2.1.]

klasszikus elsőrendű logika: az → *extenzionális logika* azon része, amelyben csak a következő grammatikai kategóriákat veszik figyelembe: mondatok, nevek, igazságfunktorok, extenzionális predikátumok, individuumváltozók és ezek lekötésére szolgáló kvantorok *(→ logikai grammatika).* [4.4.; 6.3.]

kommutativitás: némely kétargumentumú név- vagy mondatfunktor azon tulajdonsága, hogy bemenetei sorrendjének fölcserélése nem módosítja kimenetének faktuális értékét. Kommutatív aritmetikai névfunktorok például az összeadás és a szorzás. Az → *igazságfunktorok* közül kommutatív a konjunkció, az alternáció és a bikondicionális. [5.4.]

kondicionális: kétargumentumú → *igazságfunktor,* jele: $\supset$. Első argumentumát *előtagnak,* második argumentumát pedig *utótagnak* mondjuk. Két mondatból képezett § akkor és csak akkor hamis, ha előtagja igaz és utótagja hamis. Következésképp bármely hamis előtagú § igaz, s ugyanígy bármely igaz utótagú § igaz. A § *megfordításán* két argumentumának fölcserélését értjük; így "$p \supset q$" megfordítása "$q \supset p$"; ezek nem ekvivalensek egymással (igazságértékük lehet különböző). A § *kontraponálása* az argumentumok sorrendjének fölcserélése mindkét argumentum egyidejű negálásával; így "$p \supset q$" kontraponáltja "$\sim q \supset \sim p$", ezek logikailag ekvivalensek egymással (a *kontrapozíció* törvénye). – A § annak tagadását fejezi ki, hogy előtagja igaz és utótagja hamis, ez pedig a → *feltételes állítások* közös minimális tartalma. Ezért a §-t a köznyelvben a 'ha' kötőszóval lehet kifejezni. [5.6.]

konjunkció: kétargumentumú → *igazságfunktor,* az 'és' logikai megfelelője, jele: &. Két mondat §-ja akkor és csak akkor igaz, ha mindkét mondat igaz. A § → *kommutatív* és → *asszociatív* funktor, így kettőnél több tagra is kiterjeszthető, sorrendet előíró zárójelek használata nélkül. [5.4.]

konklúzió: → *következtetés.*

kontraponálás: → *kondicionális.*

kontrapozíció törvénye: a "$p \supset q$" és a "$\sim q \supset \sim p$" *kondicionálisok* → *logikai ekvivalenciáját* mondja ki. Kvantifikált változata: "$\forall x[F(x) \supset G(x)]$" és "$\forall x[\sim G(x) \supset \sim F(x)]$" logikailag ekvivalensek. Lásd (T14), (T37), (T38). [5.6.; 7.3.]

konverzió (megfordítás): → *kondicionális.*

kötött előfordulású változó: → *változó.*

következményreláció: 1. kétargumentumú logikai → *reláció,* melynek első argumentuma egy (esetleg üres) formulahalmaz – a *premisszák* halmaza –, második argumentuma egy formula – a *konklúzió* – lehet. Jelölése: $\mathbf{P} \Rightarrow K$, ahol $\mathbf{P}$ a premisszák halmaza és K a konklúzió. A § meghatározása szerint $\mathbf{P} \Rightarrow K$ akkor és csak akkor áll fenn, ha a $\mathbf{P} \cup \{\sim K\}$ formulahalmaz → *kielégíthetetlen,* azaz ha nincs olyan → *interpretáció,* amely valamennyi premisszát igazra, a konklúziót viszont hamisra interpretálja. – 2. Természetes nyelven fogalmazott állítások körében a §-t úgy értelmezzük, hogy az állításokat a → *logikai szerkezetüket* kifejező

formulákkal helyettesítjük *(→ formalizálás);* ekkor a § fennállása függhet attól is, hogy a logikai szerkezet föltárásában milyen mélységig hatolunk. Egy következtetés akkor *helyes,* ha a benne szereplő mondatokat lehet úgy strukturálni és formalizálni, hogy a kapott formulák körében fönnálljon a § *(→ következtetés).* [9.2.]

következtetés: az a szellemi munka, amelynek során a rendelkezésünkre álló információkból valamely további, az adatainkban rejtetten (implicite) meglévő információt hozunk napfényre, azaz közvetlenné (explicitté) teszünk. A kiinduló információk, kijelentő mondatokkal kifejezve, alkotják a § *premisszáit,* az eredményt pedig – ugyancsak kijelentő mondattal kifejezve – a § *konklúziójának* mondjuk. A § helyes, ha a premisszák igazsága szükségszerűen maga után vonja a konklúzió igazságát, azaz ha lehetetlen az, hogy a premisszák együttesen igazak, a konklúzió viszont hamis. A modern logika felfogása szerint a § helyessége kizárólag a benne szereplő mondatok → *logikai szerkezetén* és az ezekben előforduló → *logikai* szavak jelentésén múlhat. A § *hiányos,* ha kimondatlanul maradnak olyan premisszák, amelyek igazsága a bennük szereplő szavak jelentése folytán biztos; az elhallgatott premisszák pótlásával ezek helyessé tehetők. A § hibás (rossz), ha kimondatlan, de a szavak jelentése alapján igaz premisszák hozzáfűzésével sem lehet helyessé tenni *(→ következményreláció).* [1:2,3.; 9:1,2.]

kvantifikáció: a → *kvantorok* alkalmazása.

kvantor: → *nyitott mondatra* alkalmazható, → *változót lekötő* → *operátor;* lehet *univerzális* vagy *egzisztenciális* § (∀, illetve ∃). Alkalmazásakor egy változó – a § *változója* –, majd ezt egy → *nyitott mondat* – a § *hatóköre* – követi, amelyben a § változójának többnyire van szabad előfordulása. Az eredményül kapott mondatban a § változójának már nincs szabad előfordulása. Így, ha a § hatókörében csak a § változója fordul elő szabadon, az eredmény → *zárt mondat.* A § alkalmazását *kvantifikációnak* mondjuk. "$\forall x A$" azt fejezi ki, hogy az A mondat az x változó minden → *értékelése* mellett igaz, "$\exists x A$" pedig azt, hogy x-et lehet úgy értékelni, hogy A igaz legyen. Így a §-ok a 'minden' és a 'van' → *logikai szavak* megfelelői a → *logikai grammatikában.* – Ha az A mondatban az x változónak nincs szabad előfordulása, akkor "$\forall x A$" és "$\exists x A$" az A szinonimájának számít. [6:2,3.]

láncszabály: következtetés "ha p, q" és "ha q, r" alapján "ha p, r"-re; lásd (T17). – A kvantifikációs §: következtetés a "minden, ami F, az G" és "minden, ami G, az H" premisszákból "minden, ami F, az H"-ra; lásd (T39). [5.6.; 7.3.]

lehetetlenség: → *lehetőség.*

lehetőség: logikai kifejezésére az intenzionális '◊' mondatfunktort használhatjuk. "$\Diamond p$" kiolvasása: "lehetne úgy, hogy p". A "lehetetlen, hogy p" kifejezésére "$\sim \Diamond p$" alkalmas. [11.2.]

Leibniz törvénye: következtetés az "$a = b$" azonosságból és $F(a)$-ból $F(b)$-re; lásd (T53), (T54). [8.2.]

leírás (deskripció): individuális dolog megnevezése egy kizárólag rá jellemző sajátság fölhasználásával (pl. 'a Föld legmagasabb hegycsúcsa'). A leírás akkor és csak akkor nevez meg sikeresen egy dolgot, ha (legalább az adott kontex-

tusban) egyetlen olyan objektum van, amelyre a leírásban foglalt tulajdonság illik. (Így az 'a jelenlegi osztrák császár' és 'János őse' – bár grammatikailag kifogástalan leírások – nem neveznek meg individuumot.) Ha a leírásnak nincs jelölete, föllép a → *szemantikai értékrés* jelensége.

leválasztási szabály: következtetés egy → *kondicionálisból* és annak előtagjából az utótagjára; lásd (T15). [5.6.]

logika: szűkebb értelemben a helyes → *következtetés* ismérveivel, módszereivel és törvényeivel foglalkozó tudomány, tágabb értelemben hozzászámítják a tudományos módszerek és a megismerő gondolkodás normatív törvényeinek kutatását is.

Formális §: a szűkebb értelemben vett §.

Hagyományos vagy tradicionális §: általában a §-nak a szimbolikus § kialakulása előtti korszaka (fejlődési foka), de főleg a 17–19. század §-i tanainak elnevezése.

Matematikai §: matematikai diszciplína, mely egyrészt a § matematikai alkalmazásaival, másrészt a § matematikai eszközeinek, módszereinek tisztán matematikai vizsgálatával és általánosításaival foglalkozik. Gyakran a szimbolikus § terminussal egyező értelemben használják.

Szimbolikus §: a § tudományának modern fejlődési foka, amelyet G. Frege alapozott meg. Fő jellegzetességei: a §-i grammatika kidolgozása, a kvantorok bevezetése, a szemantikai értékek elmélete, a következményreláció szabatos értelmezése.

logikai ekvivalencia: 1. → *Formulák* közötti kétargumentumú speciális logikai → *reláció.* Azon, hogy két formula, *A és B, logikailag ekvivalens* – jelölése: "$A \Leftrightarrow B$" –, azt értjük, hogy *A*-ból és *B*-ből a bennük szereplő → *paraméterek* bármely szabatos behelyettesítésével azonos → *intenziójú* (és ennek folytán azonos → *igazságértékű)* mondat keletkezik. A §, nevével összhangban, → *ekvivalencia-reláció.* Ha egy formula valamely részformuláját vele logikailag ekvivalens formulával cseréljük föl, az eredetivel logikailag ekvivalens formulát kapunk. – 2. A logikailag ekvivalens formulapár paramétereinek behelyettesítésével nyert mondatpár tagjait is logikailag ekvivalenseknek mondjuk. – 3. A § egyben a kölcsönös → *következményreláció* kifejezője is: $A \Leftrightarrow B$ akkor és csak akkor áll fenn, ha $A \Rightarrow B$ és $B \Rightarrow A$ fönnáll. [5.3.; 9.3.]

logikai ellentmondás: 1. bármely → *logikai igazság* negációja. – 2. Állítások egy összessége §-t alkot, ha a → *logikai szerkezetüket* kifejező → *formulák* halmaza → *kielégíthetetlen.* (Ezt a szerkezet mélyebb feltárásával nem lehet orvosolni.) Az ilyen állítások pusztán logikai szerkezetük folytán – tehát tárgyi tartalmuktól függetlenül – nem lehetnek együtt igazak. [9.3.]

logikai funktorok: a → *logikai szerkezet* feltárásában alapvető szerepet játszó → *funktorok,* amelyeket speciális logikai jelekkel ábrázolunk. Természetes nyelvi kifejezésükre → *logikai szavakat* használunk. A → *klasszikus elsőrendű logikában* használt § az → *igazságfunktorok* és a kétargumentumú → *azonosságpredikátum.* [5.1.; 8.3.]

logikai grammatika: a nyelvi kifejezések logikai szempontból való osztályozása (kategorizálása) és összekapcsolási szabályaik meghatározása, a logikai → *következményreláció* szabatos definiálása érdekében. A § *alapkategóriái:* a *kijelentő mondat* (röviden: mondat) és az *individuumnév* (egyedi dolog neve, röviden: név). A mondatok és nevek egyéb alkatrészei a → *funktorok*. Ezek egy vagy több, kitöltésre váró szabad helyet, ún. *argumentumhelyet* tartalmaznak, amelyeket meghatározott kategóriájú kifejezésekkel kitöltve, eredményül mondatot vagy nevet kapunk. A funktort kitöltve, az argumentumhelyekre kerülő kifejezések a funktor argumentumai vagy *bemenetei,* a kitöltés eredményeként nyert kifejezés pedig a funktor *kimenete.* Egy funktor kategóriáját egyértelműen meghatározza bemeneteinek és kimenetének kategóriája. Az argumentumhelyek száma szerint megkülönböztetünk egy-, két-, három- stb. argumentumú funktorokat. Egy többargumentumú funktor *homogén,* ha valamennyi argumentumhelye egyazon kategóriába tartozó kifejezésekkel töltendő ki, máskor *inhomogén.* A legegyszerűbb típusú funktorok: (1) a → *mondatfunktorok,* amelyek mondatokból mondatokat képeznek; (2) a → *névfunktorok,* amelyek nevekből neveket képeznek; és (3) a → *predikátumok,* amelyek nevekből mondatokat képeznek. Többargumentumú funktorból kevesebb argumentumú funktort képezhetünk, ha előírjuk, hogy két vagy több azonos kategóriájú argumentumhelyére egyazon argumentum helyettesítendő. Megkülönböztetünk → *extenzionális* és → *intenzionális* funktorokat.

A természetes nyelv egyes szavainak van olyan használati módjuk, amely – a tárgyi tartalomtól függetlenül – az információ tagolására, strukturálására szolgál. Amikor e szavak ilyen minőségben szerepelnek, → *logikai szavak*nak mondjuk őket; ezek számbavétele is a § feladata. A modern logika a logikai szavakat speciális szimbólumokkal helyettesíti *(→ logikai jelek),* hogy elkülönítse e funkciójukat a természetes nyelvben betöltött egyéb szerepüktől. (Például az 'és' csak akkor logikai szó, amikor két állítás együttes információtartalmának kifejezésére szolgál; e minőségében helyettesíti az '&' logikai jel.) A logikai jelek többnyire funktorok *(→ logikai funktor)* vagy változót lekötő → *operátorok.* [2. fejezet.]

logikai igazság: 1. olyan → *formula,* amelyet nem lehet hamisra → *interpretálni* (minden interpretálása igazzá teszi). – 2. Ha egy formula §, a → *paramétereinek* bármely szabatos behelyettesítésével nyert mondatot is §-nak mondjuk. Az ilyen mondatok pusztán → *logikai szerkezetük* alapján (a bennük szereplő → *logikai szavak* jelentése folytán) igazak; a világról nem közölnek információt. [9.3.]

logikai jelek (logikai konstansok): a → *logikai szavakat* helyettesítő, pontosan rögzített jelentéssel bíró szimbólumok, amelyek a → *logikai szerkezet* kifejezésében alapvető szerepet játszanak. A → *klasszikus elsőrendű logikában* használt §:

$$\sim \quad \& \quad \vee \quad \supset \quad \equiv \quad \forall \quad \exists \quad =$$

(a nekik megfelelő logikai szavak rendre: *nem; és; vagy; ha; akkor és csak akkor ha; minden; van; azonos*). [8.3.]

logikai konstansok: → *logikai jelek.*

logikai összeadás: az → *alternáció* elnevezése a számítástechnikában.

logikai szavak: a természetes nyelv azon kifejezései, amelyek bizonyos használatukban az információ tagolására szolgálnak, és a kommunikáció minden területén föllépnek, a tárgyi tartalomtól függetlenül. A modern logika e szavakat speciális szimbólumokkal helyettesíti. A → *klasszikus elsőrendű logikában* használt logikai szavak: *nem; és; vagy; ha; akkor, és csak akkor, ha; minden; van; azonos.* (Szimbólumaik rendre: $\sim$, &, $\vee$, $\supset$, $\equiv$, $\forall$, $\exists$, =.) [5.1.; 5.8.; 6.2.; 8.2.]

logikai szerkezet: a kijelentő mondatnak a → *logikai grammatika* szerinti tagolása. Ebben láthatóvá válnak a → *funktorok* és argumentumaik, a változót lekötő → *operátorok,* és a → *logikai szavakat* → *logikai jelek* helyettesítik. [2. fejezet.]

logikai szorzás: a → *konjunkció* elnevezése a számítástechnikában.

logikai törvények: a → *következményreláció* törvényei. Speciális esetük a → *logikai ekvivalencia* és a → *logikai igazság.* [9.3.]

megengedő értelmű 'vagy': → *alternáció.*

metalogikai jelek: a logika tudományában használt speciális jelek, mint a → *logikai ekvivalencia* és a → *következményreláció* jele ($\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$). [5:3,4.]

modus ponens: → *leválasztási szabály.*

modus tollens: → *előtag indirekt cáfolása.*

mondatfunktor: olyan, egy- vagy többargumentumú → *funktor,* melynek bemenete(i) mondat(ok), és kimenete is mondat. Az → *extenzionális* §-okat → *igazságfunktoroknak* mondjuk. [2.5.; 5.1.]

mondatparaméter: → *paraméter.*

műveleti fogalom: → *fogalom.*

negáció: egyargumentumú → *igazságfunktor,* jele: $\sim$. Igaz mondat §-ja hamis, hamisé igaz. A mondat tagadásának kifejezésére szolgál ('nem igaz, hogy'). Egy mondat §-jának §-ja → *logikailag ekvivalens* az eredeti mondattal (a kettős § törvénye, lásd (T1)). [5.2.]

név: az → *individuumnév* kategóriájának rövidített elnevezése a → *logikai grammatikában.*

névfunktor: olyan, egy- vagy többargumentumú → *funktor,* melynek bemenetei nevek, és kimenete is név. Ilyenek például az aritmetikai funktorok (összeadás, szorzás stb.), amelyek számnevekből számneveket képeznek. A → *klasszikus elsőrendű logikában* nem foglalkozunk velük. [2:4,5.]

névparaméter: → *paraméter.*

***n*-tagú sorozat**: az 1, 2, ..., n számok mindegyikéhez egy-egy elem hozzárendelése; ábrázolása: $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Ha $1 \leq i \leq n$, az i számhoz rendelt a_i elemet a sorozat i-edik *tagjának* mondjuk. Az § tagjainak nem kell különbözőeknek lenniök. Az $n = 1$ esetben: egytagú sorozaton egyszerűen egy elemet értünk. Az § más elnevezése: *rendezett n-es.* [4:2,3.]

nyitott mondat: 1. olyan, névmást tartalmazó mondat, amelyben a névmás behelyettesíthető névvel. – 2. → *Változót* tartalmazó kifejezés, amelyből a válto-

zók szabatos behelyettesítésével mondat keletkezik. Ha a benne előforduló behelyettesíthető változók száma *n*, *n-változós* §-nak mondjuk.

operátor: → *változót* lekötő logikai jel. Alkalmazási sémája:

operátor – változó – (hatókör).

Az § változója általában előfordul *szabadon* az § hatókörében. Az § alkalmazásaként nyert kifejezésben az § változójának minden előfordulása *kötöttnek* számít. A → *klasszikus elsőrendű logikában* használt §-ok a → *kvantorok.* [6.2.]

önazonosság törvénye: → *azonosságpredikátum.*

paraméter: a → *logikai törvények* kifejezésekor használt betűjel. A §-eket a → *logikai grammatika* kategóriáival egyezően kategorizáljuk; így megkülönböztetünk *mondat*-§-eket (*p, q, r* stb.), *név*-§-eket (*a, b, c* stb.) és *predikátum*-§-eket (*F, G, H* stb.). Valamely → *formulában* vagy sémában a §-ek szabatos behelyettesítésén azt értjük, hogy *a)* minden egyes §-t *vele egyező kategóriájú* természetes nyelvi kifejezéssel helyettesítünk, és *b)* ha valamely § többször is előfordul, minden előfordulását egyazon kifejezéssel helyettesítjük be. [5:2,3.]

predikatív fogalom: egy → *predikátum* → *intenziója.*

predikátum: olyan, egy- vagy többargumentumú → *funktor,* melynek bemenetei nevek, kimenete pedig mondat. A §-ok tehát egy vagy több névből mondatot képeznek. A természetes nyelvben igék, főnevek és melléknevek gyakran §-okként funkcionálnak. A § *extenzionális,* ha bemeneteinek → *faktuális értéke* egyértelműen meghatározza kimenetének faktuális értékét. Egy *n*-argumentumú § *faktuális értéke* olyan függvény, amely a → *tárgyalási univerzum* elemeiből képezett *n*-tagú sorozatok (rendezett *n*-esek) mindegyikéhez hozzárendeli a két igazságérték (0 és 1) valamelyikét ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Egy ilyen § *terjedelmén* azon *n*-tagú sorozatok halmazát értjük, amelyekre a § igaz. [2:4,5.; 4:1,2,3.]

predikátumparaméter: → *paraméter.*

premissza: → *következtetés.*

potenciális keresztezés: → *fogalom.*

reflexív reláció: → *reláció.*

reláció: két- vagy többargumentumú → *predikátum* → *intenziója.* Gyakoriságuk miatt különösen fontosak a kétargumentumú §-k. Nevezetes tulajdonságaik: Az *R* § az *U* → *tárgyalási univerzumon:*

a) tranzitív, ha "*Rab*" és "*Rbc*" esetén "*Rac*" is mindig igaz,

b) szimmetrikus, ha "*Rab*" esetén "*Rba*" is mindig teljesül,

c) aszimmetrikus, ha "*Rab*" esetén "*Rba*" mindig hamis,

d) antiszimmetrikus, ha "*Rab*" és "*Rba*" csak úgy állhat egyszerre, ha $a = b$,

e) reflexív, ha "*Raa*" mindig igaz,

f) irreflexív, ha "*Raa*" mindig hamis. [8.5.]

rendezési reláció: olyan *tranzitív* → *reláció* (adott → *tárgyalási univerzumon*), amely

a) reflexív és antiszimmetrikus (*gyönge* §), vagy

b) irreflexív (*erős* §).

Ha az erős § a tárgyalási univerzum két különböző eleme között mindig fennáll valamelyik irányban, akkor *lineáris* rendezésnek mondjuk. [8.5.]

rendezett *n*-es: → *n-tagú sorozat.*

rendezett pár: *első* tagból és *második* tagból álló pár, melyben a két tag lehet azonos is. Az "(*a, b*)" kifejezés jelöli azt a §-t, melynek első tagja *a*, második tagja *b*. A § *kéttagú sorozatnak is* mondható, amely az → *n-tagú sorozat* speciális esete. [4.2.]

séma: → *logikai törvények* kifejezése → *formulák* segítségével. Nevezetes típusai: → *logikai ekvivalenciát,* → *következményrelációt,* illetve → *logikai igazságot* kifejező §; ezek szerkezete rendre: $A \Leftrightarrow B$, $\mathbf{P} \Rightarrow K$, $\Rightarrow A$ (ahol A, B, K formulák, **P** pedig formulahalmaz). Néha a formulákat is §-knak mondjuk (azzal a motivációval, hogy bármely formula végtelen sok azonos logikai szerkezetű mondat közös §-ja). [5.3.; 9.1.]

'sem-sem' funktor: kétargumentumú → *igazságfunktor,* jele '||'; két negált mondat konjunkciójának kifejezésére szolgál. [5.7.]

Sheffer-funktor: kétargumentumú → *igazságfunktor,* jele '|', a konjunkció tagadásának kifejezésére szolgál. [5.7.]

strukturált mondat: olyan mondat, melynek → *logikai szerkezetét* kisebb vagy nagyobb mélységig feltártuk, s ennek folytán → *logikai jelek,* sorrendet kijelölő zárójelek és esetleg → *kvantifikált változók* is szerepelnek benne. A §-ból → *formulát* nyerünk, ha felbontatlanul hagyott alkatrészeit (megfelelő kategóriájú) → *paraméterekkel* helyettesítjük (az azonosakat azonos, a különbözőeket különböző paraméterekkel). [9.1.]

szabad előfordulású változó: → *változó.*

szemantikai érték: a nyelvi kifejezésnek az a sajátsága, hogy – a nyelvhasználat társadalmi gyakorlatában kialakult módon – képes a nyelven kívüli világra vonatkozni. Azt, hogy egy kifejezés a nyelven kívüli világra vonatkozik, úgy fejezzük ki, hogy a kifejezés §-ekkel bír. A logikában a §-ek két fő típusát különböztetjük meg: az → *intenziót* és a → *faktuális értéket.* [3.1.]

szemantikai értékrés: az a jelenség, amikor valamely olyan kifejezésnek, amelynek lehetne → *faktuális értéke,* ténylegesen nincs faktuális értéke. Speciális esetei: név → *jelölet* nélkül, mondat → *igazságérték* nélkül; extenzionális funktor nincs definiálva a → *tárgyalási univerzum* némely elemére.

szimmetrikus reláció: → *reláció.*

szükséges és elegendő feltétel: igaz → *feltételes állításban* az előtag igazsága *elegendő* (de esetleg nélkülözhető) feltétel az utótag igazságához, az utótag igazsága viszont *szükséges* (elengedhetetlen) feltétele az előtag igazságának. A "*p* akkor és csak akkor, ha *q*" séma annak kifejezésére szolgál, hogy *q* §-e *p*-nek (és fordított szereposztásban is). [5:6,7.]

szükségszerűség: logikai kifejezésére az → *intenzionális* '□' *mondatfunktort* használhatjuk. "□*p*" kiolvasása: "szükségszerű, hogy *p*". Igazságának föltétele: a természet vagy a nyelvhasználat törvényei kizárják *p* hamisságát. [11.2.]

tárgyalási univerzum: egyedi dolgok alkotta nemüres halmaz, amely az → *extenzionális predikátumok terjedelmének* és a nevek → *jelöletének* megadására szolgál a kifejezések → *interpretálása* során. [4:1,2,3.; 6.3.; 9.1.]

terjedelem: → *predikátum.*

tranzitív reláció: → *reláció.*

tulajdonnév: olyan → *individuumnév,* amely nem jelentése, hanem konvenció alapján jelöl valamely egyedi dolgot. [2.2.]

unicitásformula: azt fejezi ki, hogy valamely *F* predikátum egyetlen individuumra igaz; szerkezete: $\exists x \forall y[F(y) \equiv y = x]$, rövidítése: $\exists! x.F(x)$, lásd (T55), (T56). [8.4.]

univerzális állítás: univerzális → *kvantorral* kezdődő, azaz "$\forall x.A$" szerkezetű állítás. Gyakori alakja: "$\forall x[F(x) \supset G(x)]$" ("minden, ami *F*, az *G*"); ezt *általánosított kondicionálisnak* is mondjuk. [7.2.]

univerzális kvantor: → *kvantor.*

utótag: a → *feltételes állításban* az a tagmondat, amelyet a kimondott feltétel teljesülése esetére állítunk (általában az 'akkor' utáni tagmondat), továbbá a → *kondicionális* második argumentuma. [5.6.]

változó: a → *logikai grammatikában* használt betűjel. Mint a → *paramétereket,* a §-kat is a logikai grammatika kategóriái szerint osztályozzuk; a → *klasszikus elsőrendű logikában* azonban csak az → *individuumnév* kategóriájában használunk §-kat ezeket individuum-§-knak mondhatjuk (*x, y, z* stb.). Az individuum-§-k előfordulhatnak a nevek számára fenntartott pozíciókban, továbbá → *operátorok* (például → *kvantorok*) §-iként, közvetlenül követve egy operátort. Az operátor *leköti* a §-kat, valamint annak az operátor *hatókörébe* eső összes előfordulását. Egy (§-kat is tartalmazó) kifejezésben valamely § azon előfordulásait mondjuk *kötötteknek,* amelyeket a kifejezésben valamely operátor (például kvantor) leköt (az iménti értelemben), a § egyéb előfordulásait pedig *szabad* előfordulásoknak mondjuk. Az individuum-§-k szabad előfordulásai értelmesen helyettesíthetők nevekkel, kötött előfordulásaik azonban nem. A természetes nyelv nem használ §-kat lekötő operátorokat és kötött §-kat, a logikai szerkezet szabatos feltárásához azonban ezek nélkülözhetetlenek.

zárt mondat: olyan mondat, amelyben nincs szabad előfordulású (behelyettesíthető) → *változó* vagy névmás.

A fontosabb logikai törvények

Az igazságfunktorok törvényei

(T1) $\sim\sim p \Leftrightarrow p$
(T2) $p \,\&\, q \Leftrightarrow q \,\&\, p$
(T3) $(p \,\&\, q) \,\&\, r \Leftrightarrow p \,\&\, (q \,\&\, r)$
(T4) $(p_1 \,\&\, p_2 \,\&\ldots\&\, p_n) \Rightarrow p_1$
$[i = 1, 2, \ldots, n]$
(T5) $p \vee q \Leftrightarrow \sim(\sim p \,\&\, \sim q)$
(T6) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
(T7) $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
(T8) $p_1 \Rightarrow (p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n)$
$[i = 1, 2, \ldots, n]$
(T9) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \,\&\, \sim q)$
(T10) $\sim(p \,\&\, q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$
(T11) $p \,\&\, q \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$
(T12) a) $\{p \vee q, \sim p\} \Rightarrow q$
b) $\{p \vee q, \sim q\} \Rightarrow p$
(T13) $p \supset q \Leftrightarrow \sim(p \,\&\, \sim q)$
(T14) $p \supset q \Leftrightarrow \sim q \supset \sim p$
(T15) $\{p \supset q, p\} \Rightarrow q$
(T16) $(p \supset q, \sim q) \Rightarrow \sim p$
(T17) $(p \supset q, q \supset r) \Rightarrow p \supset r$
(T18) $p \vee q \Leftrightarrow \sim p \supset q$
(T19) $p \,\&\, q \Leftrightarrow \sim(p \supset \sim q)$
(T20) $p \supset (q \supset r) \Leftrightarrow (p \,\&\, q) \supset r$
(T21) $p \equiv q \Leftrightarrow (p \supset q) \,\&\, (q \supset p)$
(T22.1) $p \equiv q \Rightarrow p \supset q$
(T22.2) $p \equiv q \Rightarrow q \supset p$
(T23) $\{p \equiv q, q \equiv r\} \Rightarrow p \equiv r$
(T24) $p \nabla q \Leftrightarrow \sim(p \equiv q)$
(T25) $p \nabla q \Leftrightarrow \sim p \equiv q \Leftrightarrow p \equiv \sim q$
(T26) $p \mid q \Leftrightarrow \sim(p \,\&\, q)$
(T27) $p \mid\mid q \Leftrightarrow \sim(p \vee q)$
(T28) $p \mid\mid q \Leftrightarrow (\sim p \,\&\, \sim q)$
(T29) $p \mid p \Leftrightarrow \sim p$
(T30) $(p \mid q) \mid (p \mid q) \Leftrightarrow (p \,\&\, q)$
(T31) $p \mid\mid p \Leftrightarrow \sim p$
(T32) $(p \mid\mid q) \mid\mid (p \mid\mid q) \Leftrightarrow p \vee q$

Származékok az analitikus táblázatokban

$\sim\sim A$ → A	$A \,\&\, B$ → $\begin{cases} A \\ B \end{cases}$	$\sim(A \vee B)$ → $\begin{cases} \sim A \\ \sim B \end{cases}$	$\sim(A \supset B)$ → $\begin{cases} A \\ \sim B \end{cases}$

$A \vee B$ → $A \mid B$	$A \supset B$ → $\sim A \mid B$	$\sim(A \,\&\, B)$ → $\sim A \mid \sim B$	$A \equiv B$ → $\begin{cases} A \mid \sim A \\ B \mid \sim B \end{cases}$	$\sim(A \equiv B)$ → $\begin{cases} A \mid \sim A \\ \sim B \mid B \end{cases}$

Kvantifikációs és azonossági törvények

(T33.1) $\exists x.F(x) \Leftrightarrow \sim \forall x \sim F(x)$
(T33.2) $\sim \exists x \sim F(x) \Leftrightarrow \forall x.F(x)$
(T34.1) $\exists x \sim F(x) \Leftrightarrow \sim \forall x.F(x)$
(T34.2) $\sim \exists x.F(x) \Leftrightarrow \forall x \sim F(x)$
(T35) $\sim \exists x[F(x) \,\&\, G(x)] \Leftrightarrow \forall x[F(x) \supset \sim G(x)]$
(T36) $\sim \exists x[F(x) \,\&\, \sim G(x)] \Leftrightarrow \forall x[F(x) \supset G(x)]$
(T37) $\forall x[F(x) \supset G(x)] \Leftrightarrow \forall x[\sim G(x) \supset \sim F(x)]$
(T38) $\forall x[F(x) \supset \sim G(x)] \Leftrightarrow \forall x[G(x) \supset \sim F(x)]$
(T39) $\{\forall x[F(x) \supset G(x)], \forall x[G(x) \supset H(x)]\} \Rightarrow \forall x[F(x) \supset H(x)]$
(T40) $p \supset \forall y.G(y) \Leftrightarrow \forall y[p \supset G(y)]$
(T41) $p \supset \exists y.G(y) \Leftrightarrow \exists y[p \supset G(y)]$
(T42) $\forall x.F(x) \supset p \Leftrightarrow \exists x[F(x) \supset p]$
(T43) $\exists x.F(x) \supset p \Leftrightarrow \forall x[F(x) \supset p]$
(T44) $p \,\&\, \exists y.G(y) \Leftrightarrow \exists y[p \,\&\, G(y)]$
(T45.1) $\forall x \forall y.F(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x, F(x, y)$
(T45.2) $\exists x \exists y.F(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x.F(x, y)$
(T46) $\exists x \forall y.F(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x.F(x, y)$
(T47) $\forall x.F(x) \Rightarrow F(a)$
(T48) $F(a) \Rightarrow \exists x.F(x)$
(T49) $\forall x.F(x) \Rightarrow \exists x.F(x)$
(T50) $\{\forall x[F(x) \supset G(x)], F(a)\} \Rightarrow G(a)$
(T51) $\Rightarrow a = a$
(T52) $\Rightarrow \forall x\ (x = x)$
(T53) $\{a = b, F(a)\} \Rightarrow F(b)$
(T54) $\Rightarrow \forall x \forall y\ [x = y \,\&\, F(x)) \supset F(y)]$
(T55) $\forall x[F(x) \equiv x = a] \Leftrightarrow (F(a) \,\&\, \forall x[F(x) \supset x = a])$
(T56) $\exists! x.F(x) \Leftrightarrow \exists y \forall x[F(x) \equiv x = y]$

Pázmány Péter Katolikus Egyetem
Bölcsészettudományi Kar
Könyvtár

Szimbólumok jegyzéke

Logikai jelek

$\sim$ a negáció jele
& a konjunkció jele
$\vee$ az alternáció jele
$\supset$ a kondicionális jele
$\equiv$ a bikondicionális jele
∇ a kizáró 'vagy' jele
| Sheffer-funktor
|| 'sem-sem' funktor
$\forall$ univerzális kvantor
$\exists$ egzisztenciális kvantor
$=$ azonosságjel
$\exists!$ unicitáskvantor

Metalogikai jelek

$\Leftrightarrow$ a logikai ekvivalencia jele
$\Rightarrow$ a következményreláció jele

Betűjelek

p, q, r	mondatparaméterek
F, G, H	predikátumparaméterek
a, b, c	névparaméterek
x, y, z	individuumváltozók
A, B, C	formulákra utaló betűk
P	premisszahalmaz
K	konklúzió

Halmazelméleti jelek

$\cup$ halmazok egyesítésének jele
$\varnothing$ az üres halmaz jele

Útmutató a könyv használatához

A modern logikai ismeretek olyan szigorúan fölépített rendszert alkotnak, amelyet csak az alapfogalmakból kiinduló, meghatározott sorrendet követő tanulmányozással lehet megérteni és elsajátítani. E tankönyv fejezetei és szakaszai is csak sorrendjük szerint haladva érthetők meg; a későbbi fejezetek intenzíven építenek arra, hogy az olvasó a korábbiakat már megértette, és emlékszik is tartalmukra. Egyes részek átugrása, kihagyása érthetetlenné teszi a következő részeket.

A tankönyv szerkezeti fölépítéséről a könyv elején levő tartalomjegyzék tájékoztat. A tanulás sorrendje csaknem teljesen kötött; csekély kivételek a következők: A 4. és az 5. fejezet sorrendje fölcserélhető, s a 11. fejezet a 8. fejezet feldolgozása után bármikor tanulmányozható. (Helyesebb azonban a könyv sorrendjét követni.) Egyes részek kihagyására, azaz a tananyag csökkentésére kizárólag a tanár útmutatása alapján van lehetőség.

Amikor az olvasó egy új fejezet vagy szakasz tanulmányozására tér rá, a feldolgozás során mindig találkozik olyan fogalmakkal, amelyeket a könyv korábbi helyein ismert meg. *Ne folytassa a tanulást, ha ezekre nem emlékszik,* mert csak megértés nélküli szómagolás lenne az eredmény. Először frissítse föl az elfelejtett fogalmakat! Segíthet ebben a kötet végén található betűrendes *Kislexikon,* amely azonban csak tömör összefoglalást nyújt; ha ez nem elég a fölfrissítéshez, vissza kell lapozni a könyv azon részéhez, amely részletesen – példákkal illusztrálva – tárgyalja a kérdéses fogalmakat. (Olvassuk el mindig az apró betűs részeket is, mert hozzájárulhatnak a megértéshez.)

Az új anyag megértését ellenőrizheti az olvasó az egyes fejezetek végén található *Ellenőrző kérdések* megválaszolásával. (Válasza helyességének ellenőrzésére felhasználhatja a *Kislexikont* is.) A megértés végső ellenőrzését pedig az szolgálja, ha megold néhány példát a *Gyakorló feladatok* listájáról, amely ugyancsak minden fejezethez csatlakozik. A kötet végén a *Feladatmegoldások* cím alatt támpontot talál a megoldás ellenőrzésére, bár nincs minden feladathoz kidolgozott megoldás (azért, hogy a tanár is jelölhessen ki házi feladatokat).

A logika tanulása alig jelent memorizálást; lényeges eleme a *megértés* és a gyakorló példákon való *alkalmazás.* Helyes, ha az olvasó a tanulás során ezt állandóan figyelembe veszi.

A könyvben szereplő (T1)...(T56) logikai törvények egy csokorba összefoglalva megtalálhatók. Ezekre a könyv gyakran csak kódszámukkal hivatkozik; az

olvasó bármikor gyorsan kikeresheti őket. Ugyanitt találhatók az analitikus táblázatok készítéséhez a *származékok* szerkesztésének szabályai is; ezeket a 10. fejezethez csatlakozó feladatok megoldása során hasznosíthatja az olvasó.

Könyvünk nem tartalmaz logikatörténeti ismereteket. Az érdeklődő olvasó figyelmébe ajánljuk Máté András *A logika története* című átfogó munkáját a kezdetektől a 20. század modern irányzataiig. Megtalálható Ruzsa I. – Máté A.: *Bevezetés a modern logikába.* 3. rész. 1997, Osiris Kiadó.

Az *Irodalomjegyzék* azokat a magyar nyelvű logikai munkákat ajánlja a téma iránt érdeklődő olvasó figyelmébe, amelyek e tankönyvhöz hasonló felfogásban foglalkoznak a modern logikával és alkalmazásaival, rátérve olyan fejezeteire is, amelyek bemutatására e könyvben nem maradt hely.

Irodalomjegyzék

Arisztotelész: *Organon I.* Budapest, 1979, Akadémiai Kiadó.

Copi, I. M. – Gould, J. A. (szerk.): *Kortárs tanulmányok a logikaelmélet kérdéseiről.* Budapest, 1985, Gondolat Kiadó.

Frege, G.: *Logika, szemantika, matematika.* Budapest, 1980, Gondolat Kiadó.

Kneale, M. – Kneale, W: *A logika fejlődése.* Budapest, 1987, Gondolat Kiadó.

Madarász Tiborné: A formális szemiotika programja és megvalósulása. *Világosság,* XIX. (1978), 5–7. szám.

Madarász Tiborné – Ruzsa Imre: *Modális és intenzionális logika.* Budapest, 1988, Tankönyvkiadó.

Maróth Miklós: *A görög logika Keleten.* Budapest, 1980, Akadémiai Kiadó.

Quine, W. O.: *A logika módszerei.* Budapest, 1968, Akadémiai Kiadó.

Ruzsa Imre: *Klasszikus, modális és intenzionális logika.* Budapest, 1984, Akadémiai Kiadó.

Ruzsa Imre: *Logikai szintaxis és szemantika.* 1–2. köt. Budapest, 1988/89, Akadémiai Kiadó.

Ruzsa Imre – Máté András: *Bevezetés a modern logikába.* Budapest, 1997, Osiris Kiadó.

Tarski, Alfred: *Bizonyítás és igazság.* Budapest, 1990, Gondolat Kiadó.

Tertium non datur. Az Eötvös Loránd Tudományegyetem Bölcsészettudományi Kara Szimbolikus Logika Tanszékének évkönyve. 1. szám: 1984, 2. szám: 1985, 3. szám: 1986, 4. szám: 1987, 5. szám: 1988, 6. szám: 1990.

Pázmány Péter Katolikus Egyetem

HIBAIGAZÍTÓ

A 146. oldalon az *1. táblázat* utolsó három sora helyesen:

(5,6)	(4,6)	(3,5)	(4,5)
1. ág	2. ág	3. ág	4. ág

A 149. oldalon a *3. táblázat* 3. ágán alulról a 4. sorban
q_2 helyett $\sim q_2$

A 150. oldalon a *4. táblázat* 2. sorában
p helyett q

a 6. és a 8. sorban pedig
$\sim p$ helyett $\sim q$

A 194. oldalon a *10. táblázat* 9. és 10. sorában
[4] helyett [6]

Pázmány Péter Katolikus Egyetem
Bölcsészettudományi Kar
Könyvtár